الفصل الخامس / الهندسة والقياس

Geometry and Measurement

الدرس الاول : علاقة الزوايا والمستقيمات (نظريات).

الدرس الثاني : تطابق المثلثات.

الدرس الثالث : خواص المثلثات (متساوي الساقين ، متساوي الاضلاع، قائم الزاوية)

الدرس الرابع : متوازي الاضلاع والمعين وشبه المنحرف

الدرس الخامس: الاسطوانة والكرة (الخصائص، المساحة السطحية– الحجم)

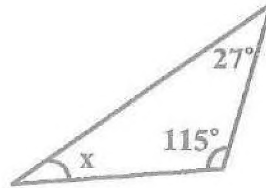
الدرس السادس : مساحة الأشكال المركبة المنتظمة وغير المنتظمة.

الدرس السابع : خطة حل المسألة (تمثيل المسألة)

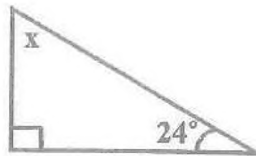
(الاختبار القبلي) Pretest

جد قيمة قيمة الزوايا المجهولة في كل من المثلثات المبينة في الأشكال الآتية:

تعلم ان مجموعة زوايا المثلث = °180 لذلك اذا علمت زاويتان نستطيع ان نجد قيمة الزاوية الثالثة من خاصية مجموع زوايا المثلث.



1) $x = 180° - (115° + 27°)$
$= 180° - 142°$
$\therefore x = 38°$

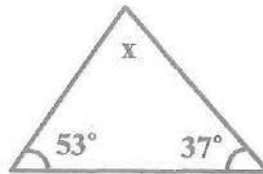


2) بما ان المثلث قائم الزاوية

يعني احدى زواياه قيمتها = °90

$x = 180° - (90° + 24°)$

$\therefore x = 180° - 114° = 66°$



3)
$x = 180° - (37° + 53°)$
$= 180 - 90°$
$\therefore x = 90°$

أحسب مساحة المنطقة المظللة في الاشكال المستوى الآتية:

مساحة شبه المنحرف = $\frac{\text{طول القاعدة السفلى+القاعدة العليا}}{2}$ × الارتفاع



4) $A = \frac{b_1 + b_2}{2} \times h$
$= \frac{14 + 8}{2} \times 5$
$= 55\ cm^2$

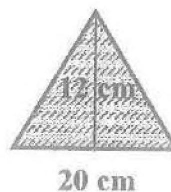
مساحة الدائرة = (نصف القطر)^2 × النسبة الثابتة



5) $A = r^2\pi$
$r = 14 \div 2 = 7\ cm$ نصف القطر

$\therefore A = (7)^2 \times \frac{22}{7} = 154\ cm^2$

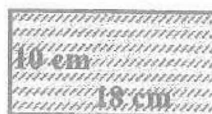
مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة × الارتفاع



20 cm

6) $A = \frac{1}{2} \times 20 \times 12$
$= 10 \times 12 = 120\ cm^2$

مساحة المستطيل = الطول × العرض



7) $A = 18 \times 10$
$= 180\ cm^2$

أكتب صحيحاً أو غير صحيح لكل من العبارات الآتية:

8) المستقيمان المتوازيان لا يلتقيان ابداً (صحيح)

9) المستقيمان المتعامدان لا يوجد بينهما نقطة التقاء (خطأ)

10) المستقيمان المتوازيان البعد بينهما ليس ثابتاً (خطأ)

11) المستقيمان المتعامدان يشكلان بينهما زاوية قائمة (صحيح)

اكمل الفراغات الآتية:

12) الزاويتان المتكاملتان يكون مجموع قياسهما $180°$.

13) الزاويتان المتتامتان يكون مجموع قياسهما $90°$.

14) تكون الزاويتان المتبادلتان متساويتان بالقياس (اذا كان المستقيمان متوازيان يقطعهما قاطع).

15) مجموع زوايا المثلث $180°$.

16) يريد احمد رصف ساحة مربعة الشكل طول ضلعها 9 m ببلاط مربع مساحة البلاطة الواحدة 0.25 m2. أحسب عدد البلاطات اللازمة لأنجاز عملية الرصف.

الحل/ نجد مساحة الساحة وهي مربعة الشكل لذلك : مساحة المربع = (طول الضلع)^2

مساحة الساحة $A = 9 \times 9 = 81\ m^2$

عدد البلاطات $81 \div 0.25 = 324$

الدرس الاول / علاقة الزوايا والمستقيمات (نظريات)

Relation of angles and straight lines (theorems)

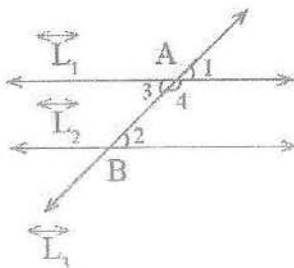
فكرة الدرس : التعرف الى علاقة الزوايا ، المتبادلة والمتناظرة والداخلية وبالعكس.

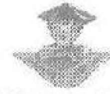
المفردات : الزوايا المتناظرة ، الزوايا المتبادلة ، الزوايا الداخلية

واليك المثال التالي لتوضيح فكرة الدرس.

تعلم : الشكل المجاور فيه $\overleftrightarrow{L_3}$, $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ يقطع كل من المستقيمين المتوازيين في النقطتين A , B.

- تسمى الزاويتان 2 , 1 زاويتان متناظرتان وتكونان متساويتان بالقياس.
- تسمى الزاويتان 3 , 2 زاويتان متبادلتان وتكونان متساويتان بالقياس.
- تسمى الزاويتان 4, 2 زاويتان داخليتان متكاملتان ويكون مجموع قياسهما $180°$.

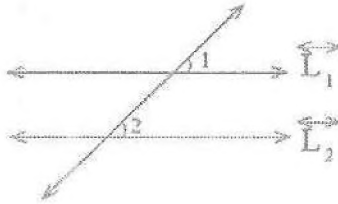




لقد تعلمت سابقاً انه اذا قطع مستقيمان متوازيان بمستقيم ثالث فالزوايا الناتجة هي: **متقابلة بالرأس ، متبادلة ، متناظرة ، متساوية بالقياس ، وفي هذا الدرس ستتعلم متى يكون المستقيمان متوازيين؟**

- عكس مبرهنة الزوايا المتناظرة:

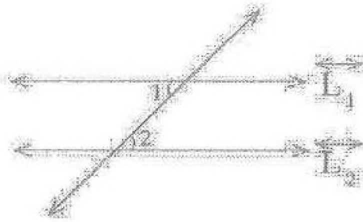
((اذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت الزاويتان المتناظرتان متساويتان بالقياس فأن المستقيمين متوازيان))



يعني اذا كان $m\angle 2 = m\angle 1$ المتناظرتان فأن $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$

- عكس مبرهنة الزوايا المتبادلة:

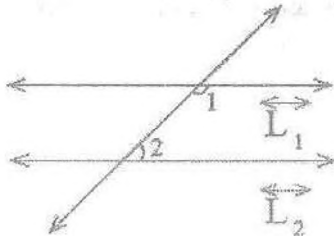
((اذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت الزاويتان المتبادلتان متساويتان بالقياس فأن المستقيمين متوازيان))



اذا كان $m\angle 2 = m\angle 1$ المتبادلتان فأن $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$

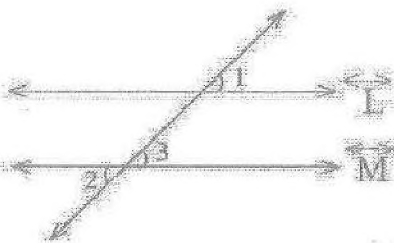
- عكس مبرهنة الزوايا الداخلية:

- ((اذا قطع مستقيم مستقيمين في المستوى نفسه وتكونت زاويتان داخليتان متكاملتان وعلى جهة واحدة من القاطع فأن المستقيمين يتوازيان)) **يعني اذا كانت $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$ داخليتان فإن $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$**



مثال 1/

استعمل المعطيات في الشكل المجاور:



اذا $m\angle 2 = m\angle 1$ بين ان $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{M}$

$m\angle 1 = m\angle 2$ (معطى)

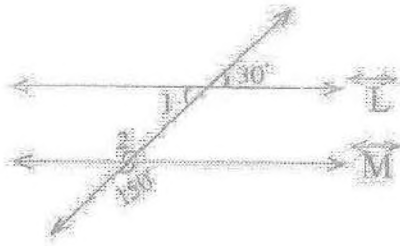
$m\angle 2 = m\angle 3$ زاويتان متقابلتان بالرأس

$m\angle 1 = m\angle 3$ (اذا ساوت كميتان كمية واحدة فالكميتان متساويتان)

وبما ان $\angle 1 , \angle 3$ زاويتان متناظرتان فأن $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{M}$ عكس مبرهنة الزوايا المتناظرة.

مثال 2//

استعمل المعطيات في الشكل المجاور وبين ان $\overleftrightarrow{L}//\overleftrightarrow{M}$



$m\angle 1 = 30°$ زاويتان متقابلتان بالرأس

$m\angle 2 = 150°$ زاويتان متقابلتان بالرأس

الزوايتان 2 , 1 داخليتان وعلى جهة واحدة من القاطع ومجموعهما $180°$ فأن $\overleftrightarrow{L}//\overleftrightarrow{M}$ عكس ميرهنة الزوايا الداخلية.

مثال 3 / استعمل المعطيات في الشكل المجاور:

حيث $m\angle 1 = m\angle 3$ $\overleftrightarrow{K}//\overleftrightarrow{M}$ بين أن $\overleftrightarrow{L}//\overleftrightarrow{M}$

$m\angle 1 = m\angle 3$ معطى

$m\angle 1 = m\angle 2$ زاويتان متناظرتان

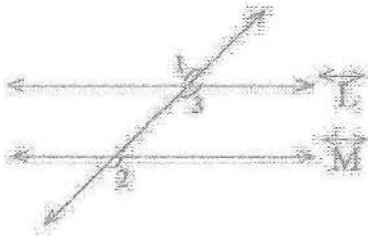
$m\angle 2 = m\angle 3$ (اذا ساوت كميتان كمية واحدة فالكميتان متساويان)

$\angle 2 , \angle 3$ زاويتان متبادلتان

اذن $\overleftrightarrow{L}//\overleftrightarrow{M}$ عكس مبرهنة الزوايا المتبادلة

تأكد من فهمك : استعمل المعطيات وعكس المبرهنات لتبين أنّ:

1) اذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ فأن $\overleftrightarrow{L}//\overleftrightarrow{M}$



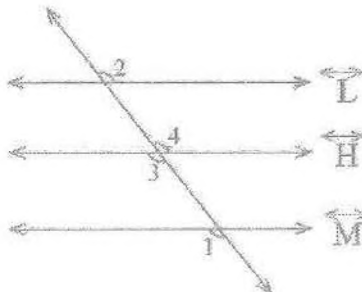
$m\angle 1 = m\angle 2$ معطى و $m\angle 1 = m\angle 3$ بالتقابل بالرأس

أذن $m\angle 2 = m\angle 3$ اذ تساوت كميتان كمية واحدة فالكميتان متساويتان)

وبما ان $\angle 3 , \angle 2$ متناظرتان فأن:

$\overleftrightarrow{L}//\overleftrightarrow{M}$ عكس مبرهنة الزوايا المتناظرة

2) اذا كان $\overleftrightarrow{L}//\overleftrightarrow{H}//\overleftrightarrow{M}$ فأن $m\angle 1 = m\angle 2$



$\overleftrightarrow{H}//\overleftrightarrow{M}$ معطى اذن $m\angle 1 = m\angle 3$ زاويتان متناظرتان

$m\angle 3 = m\angle 4$ زاويتان متقابلتان بالرأس

اذا تقاطع مستقيمان فكل زاويتان متقابلتان بالرأس متساويتان بالقياس

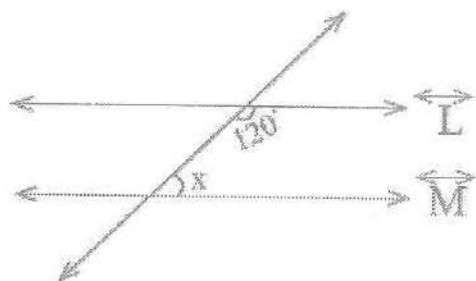
$m\angle 1 = m\angle 4$ اذا ساوت كميتان كمية واحدة فالكميتان متساويتان.

$\overleftrightarrow{L}//\overleftrightarrow{H}$ معطى



$m\angle 4 = m\angle 2$ زاويتان متناظرتان

اذن $m\angle 1 = m\angle 4$ اذا ساوت كميتان كمية واحدة فالكميتان متساويتان.



3) اذا كان $a = 4$ ، $x = 15a$ فأن $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{M}$

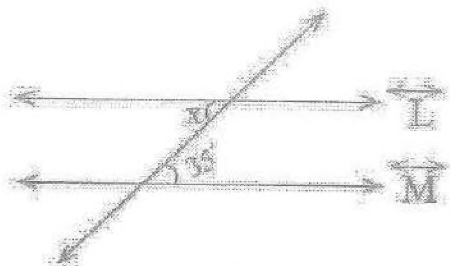
بما ان $a = 4$ معطى فأن $x = 15(4) = 60°$

$60° + 120° = 180°$

(وهما زاويتان متكاملتان وعلى جهة واحدة من القاطع)

اذن $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{M}$ عكس مبرهنة الزوايا الداخلية

تدرّبْ وحلّ التمرينات: استعمل المعطيات وعكس المبرهنات لتبين أن $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{M}$

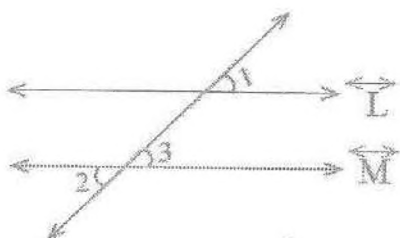


4) $a = 5$, $x = 7a$

نجد قياس زاوية x حيث $a = 5$ معطى

اذن $x = 7(5) = 35°$ وبما ان الزاويتان متبادلتان

اذن $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{M}$ عكس مبرهنة الزوايا المتبادلة



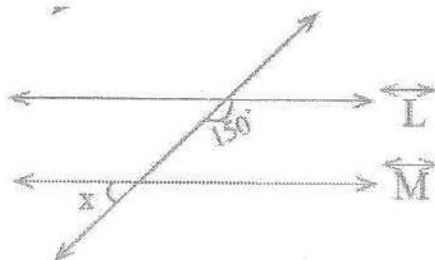
5) $m\angle 1 = m\angle 2$

$m\angle 2 = m\angle 3$ زاويتان متقابلتان بالرأس

$m\angle 1 = m\angle 2$ معطى

اذن $m\angle 1 = m\angle 3$ اذا ساوت كميتان كمية واحدة فالكميتان متساويتان.

اذن $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{M}$ عكس مبرهنة الزوايا المتناظرة.



6) $m\angle x = 30°$

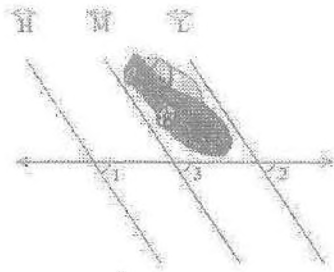
$m\angle 1 = m\angle x$ زاويتان متقابلتان بالرأس

اذن $m\angle 1 = 30°$

$30 + 150 = 180°$ وهما زاويتان داخليتان متكاملتان على جهة واحدة من القاطع

$\therefore$ $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{M}$ عكس مبرهنة الزوايا الداخلية.

تدرب وحل مسائل حياتية:



7) موقف سيارات : اراد مهندس تخطيط موقف للسيارات بصورة متوازية.

استعمل المعطيات وعكس المبرهنات لتبين ان:

$\overleftrightarrow{L}//\overleftrightarrow{M}$ حيث $m\angle 1 = m\angle 2$ وأن $\overleftrightarrow{H}//\overleftrightarrow{M}$

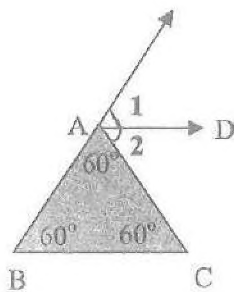
$\overleftrightarrow{H}//\overleftrightarrow{M}$ معطى فأن:

$m\angle 1 = m\angle 3$ (اذا قطع مستقيمان متوازيان بقاطع فكل زاويتان متناظرتان متساويتان بالقياس)

$m\angle 1 = m\angle 2$ معطى فأن $m\angle 2 = m\angle 3$ (اذا ساوت كميتان كمية واحدة فالكميتان متساويتان)

$m\angle 2$, $\angle m3$ زاويتان متناظرتان فأن $\overleftrightarrow{L}//\overleftrightarrow{M}$ عكس مبرهنة الزوايا المتناظرة.

8) رسم : رسم محمد المثلث المتساوي الاضلاع كما في الشكل المجاور اذ $m\angle 1 = m\angle 2$ ساعد محمداً في اثبات أن $\overline{BC}//\overrightarrow{AD}$



بما ان المثلث ABC متساوي الاضلاع فأن قياس كل زاوية منه $60°$

$m\angle 1 + m\angle 2 = 180 - 60 = 120$ (الزاوية المستقيمة قياسها $180°$).

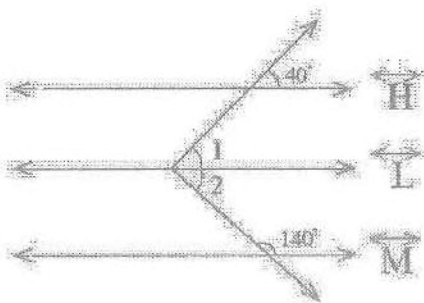
$m\angle 1 = m\angle 2$ معطى

اذن $m\angle 1 = \frac{120}{2} = 60°$

اذن $m\angle 1 = m\angle B = 60°$ وهما زاويتان متناظرتان

اذن $\overline{BC}//\overrightarrow{AD}$ عكس مبرهنة الزوايا المتناظرة

فكر: 11) تحدٍّ: في الرسم المقابل $\overleftrightarrow{H}//\overleftrightarrow{L}$ ، $m\angle 1 = m\angle 2$ برهن $\overleftrightarrow{L}//\overleftrightarrow{M}$



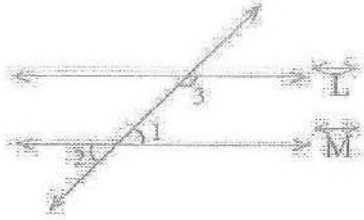
$\overleftrightarrow{H}//\overleftrightarrow{L}$ معطى اذن $m\angle 1 = 40°$ لأنهما زاويتان متناظرتان

وبما ان $m\angle 1 = m\angle 2$ معطى فأن $m\angle 2 = 40°$

لذلك $40° + 140° = 180°$ وهما مجموع قياس الزاويتان الداخليتان وعلى جهة واحدة من القاطع

اذن $\overleftrightarrow{L}//\overleftrightarrow{M}$ عكس مبرهنة الزوايا الداخلية وعلى جهة واحدة.

13) صحح الخطأ: رسم مهند الشكل المجاور وقال بما أن $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$ أذن $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{M}$؟ اكتشف الخطأ وصححهُ.



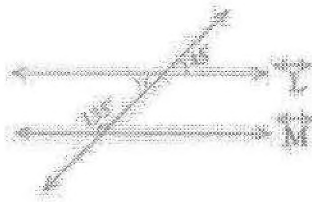
$\angle 1 , \angle 2$ زاويتان متقابلتان

وفي حالة مجموعهما $180°$ لا يمكن ان يكون $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{M}$

لذلك فأن جوابه خطأ والصحيح هو

$m\angle 1 + m\angle 3 = 180°$ وهما زاويتان داخليتان وعلى جهة واحدة من القاطع.

اكتب : هل المعلومات المعطاة في الشكل المجاور تسمح لك ان تستنتج ان $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{M}$ ؟ وضح ذلك.



$m\angle 1 = 45°$ لأنها متقابلة مع زاوية $45°$

وان $\angle 1$ والزاوية التي قياسها $135°$ داخليتان وعلى جهة واحدة من القاطع لذلك

$135° + 45° = 180°$ متكاملتان وهما زاويتان داخليتان وعلى جهة واحدة من القاطع.

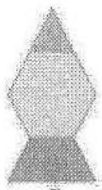
اذن $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{M}$ عكس مبرهنة الزوايا الداخلية.

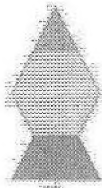
الدرس الثاني / تطابق المثلثات Congruent Triangles

فكرة الدرس : التعرف الى مفهوم التطابق وحالات تطابق المثلثات

المفردات : التطابق ، عناصر المثلث الستة ، ضلعان وزاوية محددة بهما ، زاويتان وضلع محدد بهما، ثلاثة اضلاع.

واليك المثال التالي لتوضيح فكرة الدرس:





تعلم : يبين الشكل المجاور شكلين متطابقين ونقصد بذلك ام كلاً من الشكلين المتطابقين هو نسخة طبق الاصل من الآخر فقولنا ان الشكل A ينطبق على الشكل B يعني ان الشكل A نسخة اخرى من الشكل B القطع المستقيمة تتطابق اذا كان لهما نفس القياس اي الطول نفسه وتتطابق الزوايا اذا كان لهما القياس نفسه وتتطابق المضلعات اذا امكن وضع احدهما على الآخر بحيث تنطبق رؤوس كل مضلع على الآخر نستخدم الرمز $\cong$ للدلالة على التطابق.

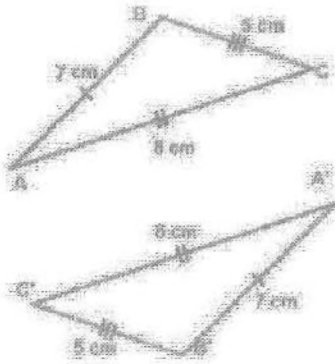
مفهوم تطابق مثلثين Concept of congruent two triangles

لكل مثلث عناصر ستة (ثلاثة اضلاع وثلاثة زوايا) نقول ان المثلثين يتطابقان اذا كان لكل عنصر من العناصر الستة في احد المثلثين عنصر يطابقه من المثلث الآخر. والعكس صحيح ايضاً. اي: اذا تطابق مثلثان فأن لكل عنصر من العناصر الستة في احد المثلثين عنصراً يطابقهُ من المثلث الآخر يسمى (نظيره) وإذا تطابق مثلثان فأن مساحة سطح المثلث الاول تساوي مساحة سطح المثلث الثاني.

- حالات تطابق مثلثين Cases of congruent two triangles

ليس من الضروري اثبات تطابق العناصر الستة من احد المثلثين مع نظائرها من المثلث الآخر لنقول ان المثلثين متطابقين بل يكفي معرفة 3 عناصر (بينهما ضلع على الاقل) من احد المثلثين مع نظائرها من المثلث الآخر. وفيما يلي الحالات التي يتطابق فيها المثلثين:

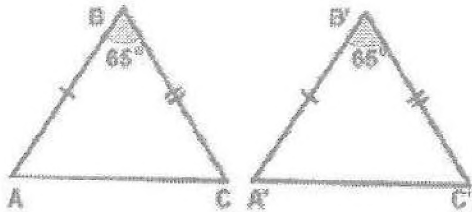
الحالة الاولى: (تطابق الاضلاع الثلاثة) يتطابق المثلثان اذا تطابقت أضلاع المثلث الاول مع نظائرهما من المثلث الثاني. (ض.ض.ض)



مثال 1/ في الشكل المجاور

- الضلع $\overline{AB}$ ينطبق على الضلع $\overline{A'B'}$ $(\overline{AB} \cong \overline{A'B'})$
- الضلع $\overline{AC}$ ينطبق على الضلع $\overline{A'C'}$ $(\overline{AC} \cong \overline{A'C'})$
- الضلع $\overline{BC}$ ينطبق على الضلع $\overline{B'C'}$ $(\overline{BC} \cong \overline{B'C'})$

الحالة الثانية : (تطابق ضلعين والزاوية المحددة بينهما) يتطابق مثلثان اذا تطابق ضلعان وزاوية محددة بينهما مع نظائرهما من المثلث الاخر (ض ز ض)



مثال 2/ في الشكل المجاور:

- الضلع $\overline{AB}$ ينطبق على الضلع $\overline{A'B'}$ $(\overline{AB} \cong \overline{A'B'})$
- الضلع $\overline{BC}$ ينطبق على الضلع $\overline{B'C'}$ $(\overline{BC} \cong \overline{B'C'})$
- الزاوية ABC تنطبق على الزاوية $A'B'C'$ $(\angle ABC \cong \angle A'B'C')$ اي أن

$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ (ض ز ض)

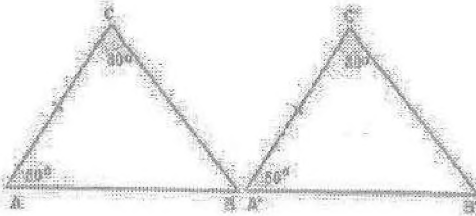
الحالة الثالثة : (تطابق زاويتين والضلع المحدد بينهما) يتطابق المثلثان اذا تطابقت زاويتان والضلع المحدد بينهما (الواصل بينهما) مع نظائرهما من المثلث الاخر (ز ض ز)

مثال 3 / في الشكل المجاور

- الزاوية BAC تنطبق على الزاوية $B'A'C'$ $(\angle BAC \cong \angle B'A'C')$

- الزاوية ACB تنطبق على الزاوية $A'C'B'$ $(\angle ACB \cong \angle A'C'B')$

- الضلع $\overline{AC}$ ينطبق على الضلع $\overline{A'C'}$ $(\overline{AC} \cong \overline{A'C'})$



اي ان $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ (ز ض ز)

∴ حالات تطابق مثلثين:

1- (ض . ض . ض) ثلاثة اضلاع.

2- (ض ز ض) ضلعان والزاوية المحددة بهما.

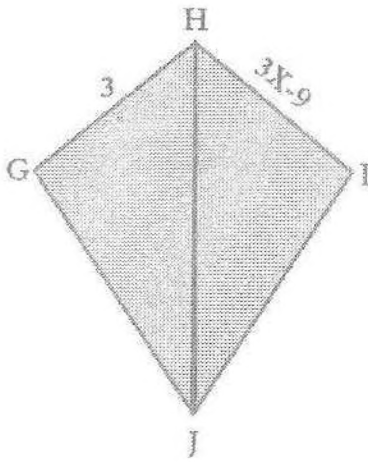
3- (ز ض ز) زاويتان والضلع المحدد بهما.

مثال 4 / في الشكل المجاور

- جد قيمة x التي تجعل $\Delta GHJ \cong \Delta IHJ$

- اذا كان قياس $\angle HIJ$ يساوي $87°$ فما قياس $\angle HGJ$ ؟

- اذا كان قياس $\angle IJH$ يساوي $30°$ فما قياس $\angle HJG$ ؟



$3x - 9 = 3$ من خواص التطابق (تساوي الاضلاع المتناظرة)

$3x = 3 + 9$ علاقة الجمع بالطرح

$3x = 12$ تبسيط $\Longleftarrow$ $x = 4$ الناتج

$m\angle HGJ = m\angle HIJ$ من خواص التطابق (تساوي الزوايا المتناظرة)

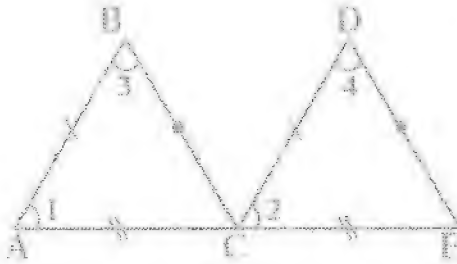
اذن $m\angle HGJ = 87°$ بالتعويض

$m\angle IJH = m\angle HJG$ من خواص التطابق (تساوي الزوايا المتناظرة)

اذن $m\angle HJG = 30°$ بالتعويض

تأكد من فهمك:

1) لاحظ الشكل المجاور أذ المثلثان ABC ≅ CDE متطابقان.

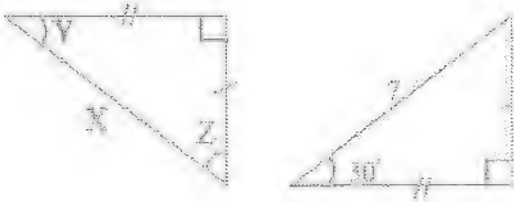


حالة التطابق	العناصر المتطابقة
ز ض ز الحالة الثالثة	$m\angle 1 = m\angle 2 , m\angle 3 = m\angle 4$ AB = CD
ض ز ض الحالة الثانية	$m\angle 1 = m\angle 2 , AB = CD$ AC = CE
ض ض ض الحالة الأولى	AB = CD , AC = CE BC = DE

2) جد قيمة x , y , z المؤشرة في الشكل المجاور أذ المثلثان متطابقان.

بما أن المثلثان متطابقان (معطى)

يعني ان الزوايا المتناظرة والاضلاع المتناظرة متطابقة ومتساوية بالقياس. لذلك:



من خواص التطابق x = 7

نفس السبب $m\angle y = 30°$

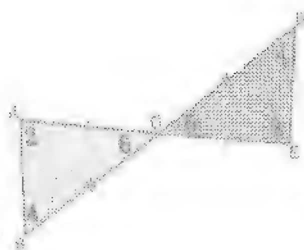
مجموعة زوايا المثلث $z = 180° - (90 + 30)$

والمثلثان كل منهما قائم الزاوية

$\therefore z = 180° - 120° = 60°$

تدرب وحل التمرينات:

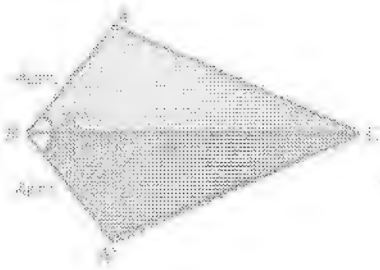
3) لاحظ الشكل المجاور $\overline{AB} // \overline{DE}$ أذن $\Delta ABC \cong \Delta CED$



حالة التطابق	العناصر المتطابقة
ضلعان وزاوية محددة بينهما	$\overline{CD} = \overline{CB} , \overline{AC} = \overline{CE}$ $m\angle 6 = m\angle 5$
زاويتان وضلع محدد بينهما	$m\angle 1 = m\angle 4 , m\angle 5 = m\angle 6$ $\overline{CD} = \overline{CB}$
ثلاث اضلاع	$\overline{DE} = \overline{AB} , \overline{CD} = \overline{CB}$ $\overline{CE} = \overline{CA}$



4) انظر الى المثلثين ABC, A'BC في الشكل المجاور ثم اكتب بالرموز اسماء الزاويتين المتطابقتين والضلعين المتساويين ثم عبر عن التطابق بالصورة الرمزية وبين نوع التطابق.



قياس كل منهما 30° $m\angle ABC = m\angle A'BC$

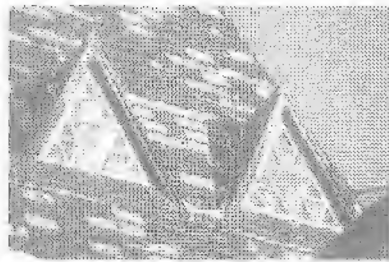
قياس كل منهما $4\ cm$ $AB = A'B$

BC مشترك

(ض ز ض) $\Delta ABC \cong \Delta A'BC$

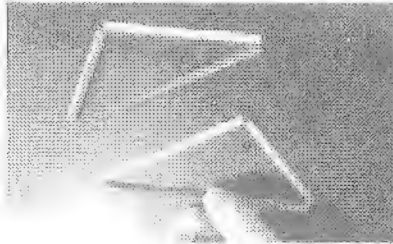
تدرب وحل مسائل حياتية:

بناء : انظر الى الشكل المجاور للنافذتين



5) كم مثلثاً متطابقاً تستطيع أن تحصي؟ 17 مثلثاً

6) اي نوع من التطابق بين المثلثات الموجودة فيها؟ (ثلاثة اضلاع ض ض ض)



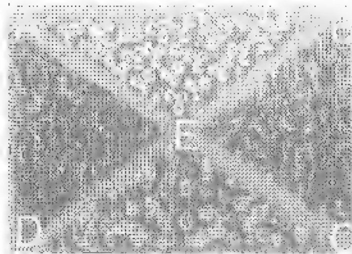
تسلية: انظر الى المثلثين في الشكل المجاور

7) ما نوع التطابق بين المثلثين؟

ضلعين والزاوية المحددة بينهما (ض ز ض)

8) حاول (عملياً) باستخدام نفس الاسلوب اظهار بقية حالات التطابق.

لوطبقنا المثلثين احداهما على الآخر نلاحظ ان الاضلاع تتطابق (ض ض ض) وكذلك زاويتين والضلع المحدد بينهما (ز ض ز)

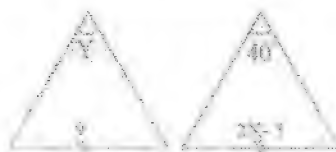


9) حديقة : حديقة ازهار قسمت كما هو موضح بالشكل المجاور.

اثبت أن $\Delta ADC \cong \Delta BCD$

$BC = AD$ ضلعان متقابلان في مستطيل و $DC = DC$ مشترك

$\angle D = \angle C = 10^\circ$ لذا فأن $\Delta ADC \cong \Delta BCD$



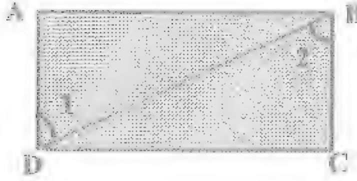
10) هندسة : من المثلثين المتطابقين المتجاورين جد قيمة x , y

من التطابق $m\angle y = 40^\circ \Leftarrow y = 40^\circ$

من التطابق $2x - 5 = 9 \Leftarrow 2x = 5 + 9 \Leftarrow 2x = 14 \Leftarrow x = 7$

فكر

11) تحدٍّ : هل يتطابق المثلثان القائما الزاوية اللذان يتساوى طولا وتر وأحد الضلعين القائمين في احدهما مع نظيريهما من المثلث الآخر؟ فسر أجابتك



الجواب : نعم وتعتبر حالة رابعة من التطابق حيث تعتبر الشكل الناتج مستطيل (وتر ضلع قائم وتر). $m\angle 1 = m\angle 2$ (متبادلة)

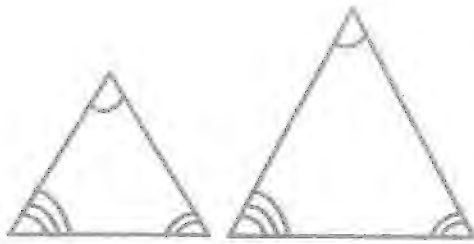
(وتر ضلع مشترك) DB , AD = BC ضلعان متقابلان متساويان

اذن يتطابق المثلثين ABD , BCD (ض ز ض)

12) مسألة مفتوحة: وضح ما الفرق بين تطابق مثلثين وتشابه مثلثين؟

التطابق هو تساوي قياسات العناصر الستة (الاضلاع والزوايا) من المثلث الاول مع نظائرها من المثلث الثاني.

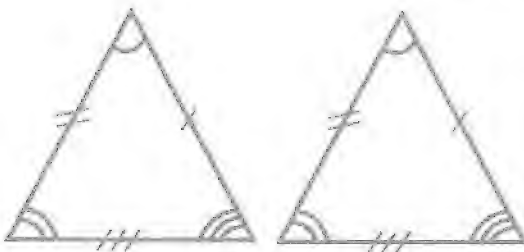
اما التشابه فهو تطابق الزوايا المتناظرة لكن الاضلاع المتناظرة تكون متباينة.



مثلثان متشابهان

13) حس عددي: اذا رسمنا قطر المستطيل تكون لدينا مثلثان؟ هل المثلثان متطابقان؟ لماذا؟

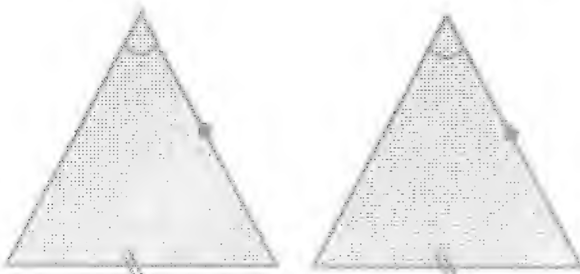
الجواب/ نعم يكون المثلثان متطابقان حسب الحالة الرابعة (زاوية قائمه وتر ضلع قائم).



مثلثان متطابقان

14) اصحح الخطأ: قالت تمارة ان المثلثين كما مبين في الشكل ادناه متطابقان. بين خطأ تمارة وصححهُ.

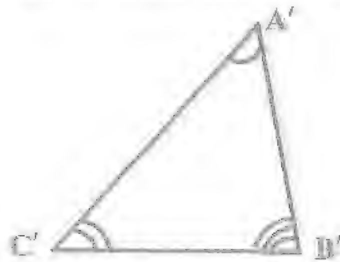
الخطأ ليس من الضروري متطابقان لأنها لا تنطبق على اي حالة من حالات التطابق. والصحيح يتطابق المثلثان في حالة تطابق ضلعان والزاوية المحددة بين الضلعين.

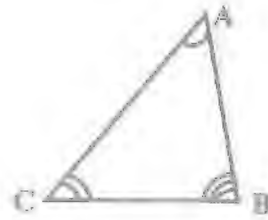


اكتب : الحالات التي لا يتطابق بها المثلثين واعط امثلة توضيحية لها مع الرسم.

اذا لم تنطبق اي حالة من الحالات الاربعة (حالات التطابق) على مثلثين فأنها لا تتطابق لكن اذا انطبقت اي حالة منها نقول المثلثين متطابقين ومثال على ذلك في المثلثين $A'B'C', ABC$ فيهما:

$\angle A = m\angle A'$ ، $m\angle B = m\angle B'$ ، $m\angle C = m\angle C'$ فأن المثلثان غير متطابقين لكنهما متشابهان.





الدرس الثالث: خواص المثلثات (متساوي الساقين ، متساوي الاضلاع ، قائم الزاوية)

Properties of triangles (isosceles triangles , Equilateral triangles , Right – angled triangle)

فكرة الدرس: التعرف الى الخواص المثلثات (متساوي الساقين ، متساوي الاضلاع ، قائم الزاوية)

المفردات : قاعدة المثلث – زاوية الرأس – ارتفاع المثلث.

واليك المثال التالي لتوضيح فكرة الدرس.

تعلم: يمكن تصنيف المثلثات تبعاً لأطوال اضلاعها الى:

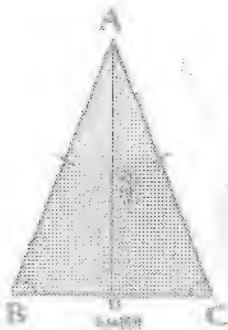
1– مثلث متساوي الساقين 2– مثلث متساوي الاضلاع 3– مثلث قائم الزاوية

سنقوم بالتعرف على خواص كل منها بالتفصيل.

تعلمت سابقاً انواع المثلثات حسب اطوال اضلاعها وبحسب قياس زواياها وفي هذا الدرس سنتعرف الى خواص مثلث متساوي الساقين ومتساوي الاضلاع ومثلث قائم الزاوية.

- خواص المثلث المتساوي الساقين : Properties of isosceles triangles

وهو مثلث فيه ضلعان متساويان ويسمى الضلع الثالث المختلف بالطول عن الضلعين المتساويين بقاعدة المثلث كما تسمى النقطة المقابلة لقاعدة المثلث برأس المثلث. اما خواصه فهي:



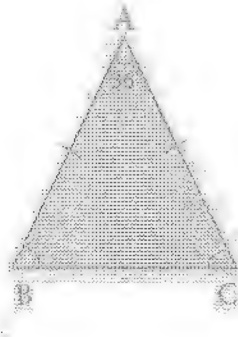
1) تتساوى قياس زاويتا القاعدة المقابلتين للضلعين المتساويين $m\angle B = m\angle C$

2) اي مثلث فيه زاويتان متساويتان يكون المثلث متساوي الساقين.

3) منصف زاوية رأس المثلث المتساوي الساقين يكون عمودياً على القاعدة وينصفها.

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ، BD = DC

مثال 1/ في الشكل المجاور اذا كان قياس $BAC = 36°$ ، وكان المثلث ABC متساوي الساقين ، جد قياس الزاوية ABC.



$m\angle ABC = m\angle ACB = x(AB = AC$ (مثلث متساوي الساقين

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = (180°$ (مجموع زوايا المثلث تساوي

بالتعويض عن A $36° + x + x = 180°$

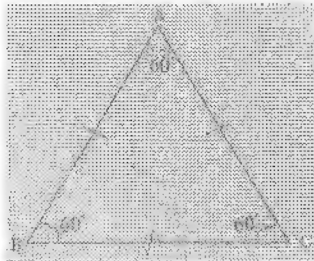
الجمع بالطرح $36° + 2x = 180° \implies 2x = 180° - 36°$

$$\therefore 2x = 144° \implies x = \frac{144°}{2} = 72°$$

$$\therefore m\angle ABC = 72°$$

خواص المثلث المتساوي الاضلاع Properties of Equatorial Triangle

وهو مثلث تكون اضلاعهُ الثلاثة متساوية بالقياس ويمكن تسميتة ايضاً (المثلث المنتظم) وخواصه هي:

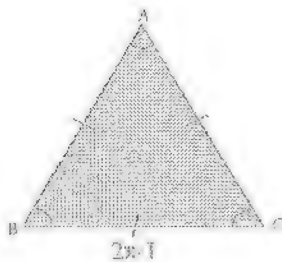


1) تكون جميع زواياه متساوية بالقياس وقياس كل زاوية = $60°$.

2) اي مثلث تكون جميع زواياه متساوية بالقياس تتساوى قياسات جميع ضلاعهُ.

وبالعكس $AB = BC = CA \implies m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60°$

مثال 2/ في الشكل المجاور مثلث متساوي الاضلاع محيطهُ 57 من السنتمترات جد طول كل ضلع ثم جد قيمة x.



طول الضلع = $\frac{\text{محيط المثلث متساوي الاضلاع}}{3} = \frac{57}{3} = 19$

ولايجاد قيمة x:

معادلة السؤال $2x - 1 = 19$

علاقة الجمع بالطرح $2x = 19 + 1$

بقسمة الطرفين على 2 $2x = 20$

$$x = \frac{20}{2} = 10\ cm$$



- خواص المثلث القائم الزاوية Properties of Right – Angled Triangles

هو المثلث الذي يكون فيه ضلعان متعامدان (الزاوية المحصورة بينهما قائمة قياسها $90°$) نسمي الضلع المقابل للزاوية القائمة بـ (الوتر) وهو اطول اضلاع المثلث، كما نسمي الضلعين الآخرين بالضلعين القائمين.

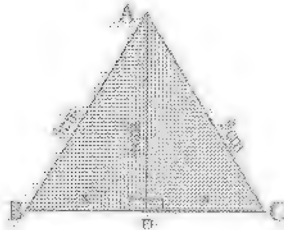
وخواصة هي:



نطبق عليه نظرية فيثاغورس حيث ان مجموع مربع طول كل من الضلعين القائمين يساوي مربع طول الوتر. ونعبر عن هذا بالصيغة الرياضية:

(مبرهنة فيثاغورس) $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

مثال /3 استعمل الشكل المجاور وجد طول $\overline{BC}$.



المعطيات : المثلث ABC متساوي الساقين فأن $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

مبرهنة فيثاغورس $(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$

بالتعويض $5^2 = 4^2 + x^2$

بالتبسيط $25 = 16 + x^2$

علاقة الجمع بالطرح، والجذر التربيعي للطرفين $x^2 = 25 - 16 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3\ cm$

ومن المعطيات نجد ان طول الضلع $\overline{BC}$ يساوي 6 cm (من خواص المثلث المتساوي الساقين)

تأكد من فهمك:

1) في المثلث المتساوي الساقين المجاور اذا علمت أن المحيط 19 cm. جد قيمة x وطول كل ضلع وقياس الزاويتين الباقتين.

ملاحظة: تم تعديل القيمة 5 – 2x الى 2 – 2x لتكون القياسات متناسبة.

$(2x+3) + (2x+3) + (2x-2) = 19$

$6x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{6} = 2\frac{1}{2}$



طول كل ضلعيه $2x + 3 = 2\,(2\frac{1}{2}) + 3 = 8$

طول القاعدة $2x - 2 = 2\,(2\frac{1}{2}) - 2 = 5 - 2 = 3$

وبما ان المثلث متساوي الساقين فأن $m\angle 1 = m\angle 2$

لأن مجموع زوايا المثلث$180°$ $\quad m\angle 1 + m\angle 2 = 180° - 40° = 140°$

$$m\angle 1 = m\angle 2 = \frac{140}{2} = 70°$$

2) المثلث ABC متساوي الاضلاع $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ منصفان للزاويتين CBA , CAB جد قياس زاوية ADB.

بما ان المثلث متساوي الاضلاع فأن قياس كل زاوية من زواياه = °60.

وبما ان $\overline{AD}$ منصف قياس زاوية A فأن:

$$m\angle DAB = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

بما ان $\overline{BD}$ منصف قياس زاوية B فأن:

$$m\angle DBA = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

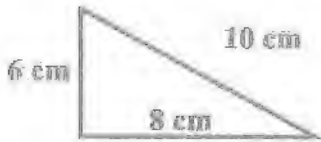
مجموع زوايا المثلث $m\angle ADB + m\angle DAB + m\angle DBA = 180^\circ$

بالتعويض $m\angle ADB + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ$

$$m\angle ADB = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$$

3) مثلث اطوال اضلاعه 8 cm , 10 cm , 6 cm هل المثلث قائم الزاوية؟ وضح ذلك مع الرسم.

في هذه الحالة نختار اطول الاضلاع وهو الذي يمثل الوتر ونربعهُ $(10)^2 = 100$ ثم نربع طول كل من الضلعين الآخرين $(6)^2 = 36$ ، $(8)^2 = 64$.



ثم نلاحظ هل أن مربع اطوال الاضلاع يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فأذا كان الجواب صحيح فأن المثلث قائم الزاوية واذا لا فالمثلث ليس قائم الزاوية.

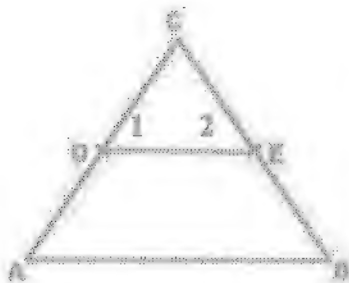
$$100 = 64 + 36$$

ففي هذه الحالة ان المثلث قائم الزاوية

تدرب وحل التمرينات /

4) في الشكل المجاور $m\angle CAB = m\angle CBA$

$\overline{DE}$ توازي $\overline{AB}$. بين لماذا يكون المثلث CDE مثلثاً متساوي الساقين؟



بما أن $m\angle A = m\angle B$ معطى

أنن المثلث متساوي الساقين (خواص المثلث المتساوي الساقين)

$\overline{DE}//\overline{AB}$ معطى

$m\angle A = m\angle 1$ زاويتان متناظرتان

$m\angle B = m\angle 2$ زاويتان متناظرتان



وعليه $m\angle 1 = m\angle 2$ بالاستعانة. لأن B = A

اذن CD = CE خواص المثلث المتساوي الساقين.

لذلك المثلث CDE متساوي الساقين.

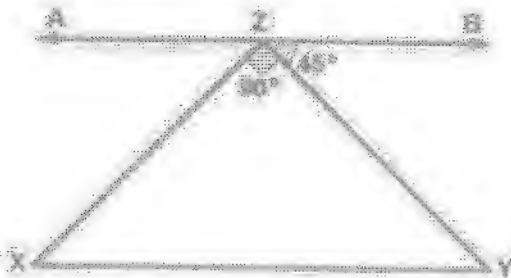
5) في الشكل المجاور Δxyz قائم الزاوية في z ، رسم المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ماراً بالرأس z وموازياً للقاعدة $\overline{xy}$ ، $m\angle Bzy = 45°$ أثبت ان المثلث xyz متساوي الساقين.

الحل/ زاوية مستقيمة $m\angle Azx + m\angle xzy + m\angle Bzy = 180°$

بالتعويض $m\angle Azx + 90° + 45° = 180°$

بالتبسيط $m\angle Azx = 180° - 90° - 45° = 45°$

وبما أن $\overline{xy} // \overleftrightarrow{AB}$ فأن $m\angle Azx = m\angle x = 45°$ (بالتبادل)



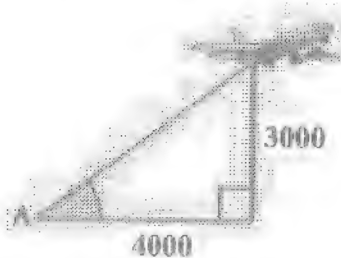
كذلك $m\angle Bzy = m\angle y = 45°$ (بالتبادل)

بالاستعاضة $\therefore m\angle x = m\angle y$

لذا فأن المثلث xyz متساوي الساقين (خواص المثلث متساوي الساقين)

تدرب وحل مسائل حياتية:

6) بناء: في الشكل التوضيحي المجاور جد المسافة بالأمتار بين الطائرة والنقطة A.



افرض المسافة = x والشكل هو مثلث قائم الزاوية

نستخدم مبرهنة فيثاغورس $x^2 = (3000)^2 + (4000)^2$

$x^2 = 9000000 + 16000000$

$x^2 = 25000000 \rightarrow x = \sqrt{25000000} = 5000$

$\therefore$ المسافة بين الطائرة والنقطة A 5000 متر.

7) جد قيمة x في الشكل [illegible] علمت ان طول السلم 13 m

الشكل المتكون هو مثلث قائم الزاوية فيه طول الوتر (السلم) معلوم وطول احد الضلعين (بعد القاعدة للسلم عن الجدار) معلوم لذلك من الممكن استخدام مبرهنة فيثاغورس.

5 m

مبرهنة فيثاغورس $(13)^2 = (x)^2 + (5)^2$

علاقة الجمع بالطرح $169 = x^2 + 25$

تبسيط $169 - 25 = x^2 \rightarrow x^2 = 144$

استخدم الجذر التربيعي $x = \sqrt{144} = 12\ m$

8) في القارب الشراعي الواضح بالشكل المجاور استخرج ارتفاع الجزء الاخضر بين الشراع ثم احسب مساحته.

الجزء الاخضر من الشراع هو عبارة عن مثلث قائم الزاوية فيه الوتر معلوم 10 m وطول القاعدة (احد الضلعين القائمين) 6 m نطبق مبرهنة فيثاغورس وليكن الارتفاع h فأن:

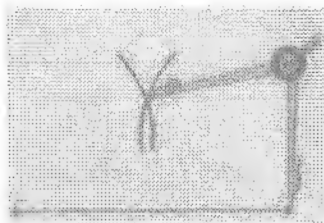
$(10)^2 = h^2 + (6)^2$

$100 - 36 = h^2 \Rightarrow h^2 = 64 \Rightarrow h = \sqrt{64} = 8\ m$ ارتفاع الشراع

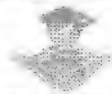
مساحة الشراع (المثلث) = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع

$$A = \frac{1}{2} \times 6 \times 8m = 24\ m^2$$

فكر: 9) تحدٍّ: باستخدام الفرجال والمسطرة حاول ان ترسم مثلثاً متساوي الاضلاع طول ضلعهُ 4 cm (انظر للصورة فاستنتج الطريقة).



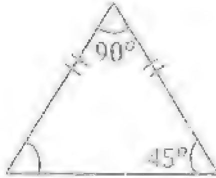
الحل/ ارسم مستقيماً على المستوي طوله معلوم ثم ثبت الفرجال الرأسي المدبب على احد طرفيه وافتح الفرجال بقدر طول قطعة المستقيم ثم حركة لترسم قوساً اعلى قطعة المستقيم ثم غير وضع الرأس المدبب على الطرف الآخر من قطعة المستقيم وارسم قوساً يتقاطع مع القوس الاول فتكون نقطة معينة ولتكن A ثم وصل بين طرفي قطعة المستقيم والنقطة A لتحصل على مثلث متساوي الاضلاع.



10) مسألة مفتوحة: ما قياس كل زاوية في مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين وضح اجابتك بالرسم.

بما ان مجموع زوايا المثلث $180°$ وهو قائم الزاوية يعني احدى زواياه $90°$

لذلك $180° - 90° = 90°$ مجموع قياس الزاويتين الآخريتين وبما أن المثلث متساوي الساقين لذلك قياس كل من زاويتي القاعدة $\frac{90°}{2} = 45°$ لذلك قياس الزوايا للمثلث القائم المتساوي الساقين هو $45°, 45°, 90°$



11) حسٌّ عدديٌّ: هل يوجد مثلث قائم الزاوية متساوي الاضلاع في آن واحد؟ وضح اجابتك بامثلة عددية.

المثلث القائم احدى زواياه قائمة $90°$ وتبقى مجموع الزاويتين الآخريتين $90°$ يعني كل واحدة $45°$. ونعلم ان المثلث المتساوي الاضلاع قياس كل زاوية من زواياهُ $60°$.

لذلك لا يوجد مثلث قائم الزاوية متساوي الاضلاع بآن واحد.

12) اصحح الخطأ: يدعي ان المثلث الذي اطوال اضلاعهُ 4 cm , 3 cm , 2 cm يمثل اضلاع مثلث قائم الزاوية اكتشف خطأ احمد وصححهُ.

تربيع اطوال جميع الاضلاع $(4)^2 = 16$ ، $(3)^2 = 9$ ، $(2)^2 = 4$

$$16 \neq 9 + 4 \rightarrow 16 \neq 13$$

لذلك المثلث ليس قائم الزاوية (لأن لو كان قائم الزاوية لتساوى الطرفان)

اكتب: ثلاثة مجموعات من الاعداد الصحيحة الموجبة التي تنطبق عليها الصيغة الرياضية لمبرهنة فيثاغورس

1) $\{5, 4, 3\}$ $\quad (5)^2 = (4)^2 + (3)^2 \Rightarrow 25 = 16 + 9 \Rightarrow 25 = 25$

2) $\{10, 8, 6\}$ $\quad (10)^2 = (8)^2 + (6)^2 \Rightarrow 100 = 64 + 36 \Rightarrow 100 = 100$

3) $\{15, 12, 9\}$ $\quad (15)^2 = (12)^2 + (6)^2 \Rightarrow 225 = 144 + 81 \Rightarrow 225 = 225$

يعني نربع اطوال الاضلاع ونربع طولي كل من الضلعين الآخرين فأذا كان مربع اطول الاضلاع = مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين نقول بأن هذهِ الاعداد تمثل اطوال اضلاع مثلث قائم الزاوية.

الدرس الرابع / متوازي الاضلاع والمعين وشبه المنحرف

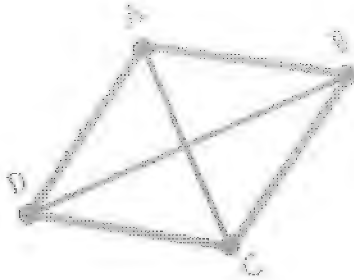
Parallelogram , Rhombus and Trapezoid:

فكرة الدرس: استعمل خصائص متوازي الاضلاع والمستطيل والمعين وشبه المنحرف في حل المسائل الهندسية.

المفردات : متوازي الاضلاع ، المعين ، شبه المنحرف.

واليك المثال التالي لتوضيح فكرة الدرس.

تعلم : الشكل الهندسي المجاور ABCD يمثل متوازي الاضلاع إذ:



1) $\overline{AB}//\overline{CD}$ ، $\overline{AD}//\overline{BC}$

2) AB = CD ، AD = BC

ويسمى المستقيم الواصل بين كل رأسين متقابلين بقطر متوازي الاضلاع $\overline{AC}$ ، $\overline{BD}$ وهما متقاطعان ومتناصفان.

متوازي الاضلاع : parallelogram

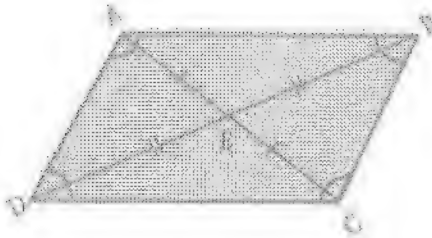
هو شكل رباعي كل ضلعين متقابلين فيه متوازيان ، والآن سوف تتعرف الى مبرهنات وخصائص متوازي الاضلاع وكيفية استعمالها في حل المسائل الهندسية.

نظريات خصائص متوازي الاضلاع.

- كل ضلعين متقابلين في متوازي الاضلاع يتطابقان $\overline{AD}//\overline{BC}$ ، $\overline{AB}//\overline{CD}$ ، AB = DC ، AD = BC

- كل زاويتين متقابلتين في متوازي الاضلاع متساويتان بالقياس.

$m\angle A = m\angle C$ ، $m\angle B = m\angle D$.



كل زاويتين متتاليتين في متوازي الاضلاع متكاملتان

$m\angle A + m\angle D = 180°$ ، $m\angle D + m\angle C = 180°$

$m\angle C + m\angle B = 180°$ ، $m\angle B + m\angle A = 180°$

- قطرا متوازي الاضلاع متناصفان BE = ED ، AE = EC.

المثلثان DCB ، DAB متطابقان. المثلثان ADC ، ABC متطابقان.

المثلثان ECD ، EBA متطابقان المثلثان EAD ، EBC متطابقان.



مثال / استعمل خصائص متوازي الاضلاع لايجاد قياسات زاوية C ، وزاوية D بالدرجات وطول كل من الضلع AB والضلع DC بالسنتمر من الشكل المجاور.

$i)\ m\angle C + m\angle D = 180^\circ$ زاويتان متكاملتان

$2x + 5^\circ + 4x - 35^\circ = 180^\circ$ بالتعويض بقيمة الزاوية

$6x - 30^\circ = 180^\circ$ تبسيط $\rightarrow 6x = 180^\circ + 30^\circ \rightarrow 6x = 210^\circ$

$\therefore x = \frac{210^\circ}{6} = 35^\circ \rightarrow m\angle C = 2\,(35^\circ) + 5 = 75^\circ$

$m\angle D = 4\,(35^\circ) - 35^\circ = 105^\circ$

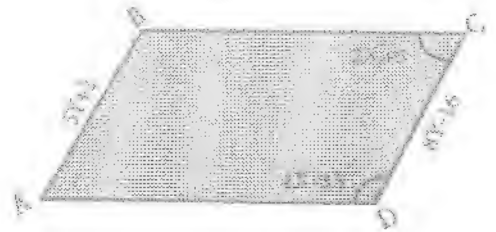
$ii)\ AB = DC \rightarrow 5y + 2 = 8y - 16$ ضلعان متقابلان متطابقان

$\rightarrow 5y - 8y = -16 - 2 \rightarrow -3y = -18$

$y = \frac{-18}{-3} \rightarrow y = 6$

$\therefore AB = 5y + 2 = 5(6) + 2 = 32\ cm$

$DC = 8y - 16 = 8\,(6) - 16 = 32\ cm$



المعين / Rhambus

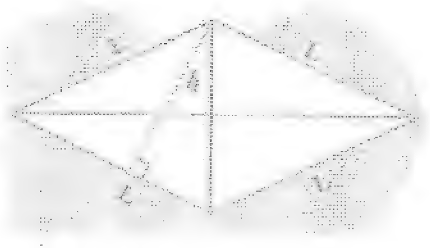
المعين هو متوازي اضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان.

نظريات خصائص المعين:

- قطرا المعين متعامدين.
- قطرا المعين كل منهما ينصف الزاويتين عند طرفيه.
- مساحة المعين = طول الضلع × الارتفاع اي $A = H \times L$

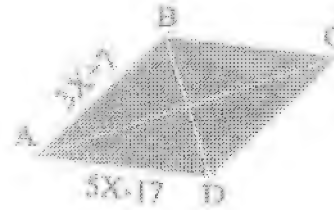
او (نصف حاصل ضرب طول كل من قطريه)

- المحيط = 4 × طول الضلع اي $P = 4 \times L$



مثال٢/ استعمل خصائص المعين لتجد طول الضلع AB ومحيط المعين:

i) AD = AB اضلاع المعين متساوية بالطول



5x – 17 = 3x + 7 → 5x -3x = 7 + 17

→ 2x = 24 → $x = \frac{24}{2} = 12$

AB = AD = 5 (12) – 17 = 43 cm

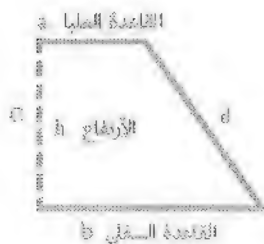
ii) P = 4 × L

P = 4 × 43

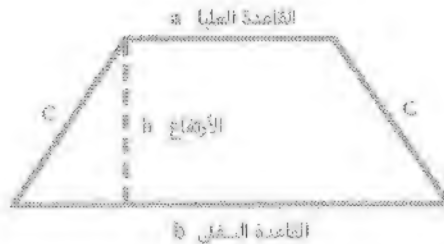
P = 172 cm المحيط

شبه المنحرف / Trapezoid

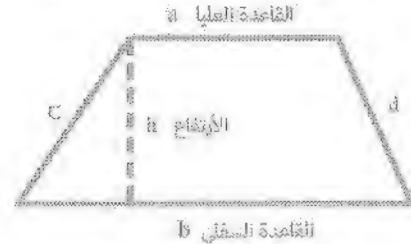
وهو شكل رباعي تختلف الاطوال، فيه ضلعان متوازيان يسميان قاعدتي شبه المنحرف وآخرين غير متوازيين، اذا كان الضلعان غير المتوازيين متساويين سمي شبه المنحرف متساوي الساقين واذا كانت احدى زواياهُ قائمة سمي شبه منحرف قائم الزاوية.



شبه منحرف قائم الزاوية



شبه منحرف متساوي الساقين



شبه منحرف مختلف الساقين

مثال٣/ i) جد مساحة شبه المنحرف الذي طولا ضلعين متوازيين فيه 8 cm ، 12 cm وارتفاعهُ 4 cm .

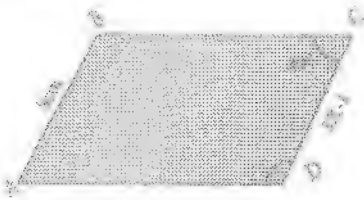
$$A = \frac{1}{2}(a + b) \times h = \frac{1}{2}(8 + 12) \times 4 = 40\ cm^2$$

ii) جد محيط شبه المنحرف متساوي الساقين طول كل من ساقيه 8 cm وطول قاعدتهُ العليا 5 cm وطول قاعدتهُ السفلى 10 cm .

P = a + b + c + d

= 5 + 10 + 8 + 8 = 31 cm محيط شبه المنحرف





تأكد من فهمك /

1) استعمل خصائص متوازي الاضلاع للشكل المجاور لتجد كل من:

CD، $m\angle A$ ، $m\angle D$

كل ضلعين متقابلين متطابقين AB = CD

$3x - 1 = 8 \rightarrow 3x = 8 + 1 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = \frac{9}{3} = 3$

$\therefore AB = CD = 3(3) - 1 = 8$ cm طول كل ضلع منهما

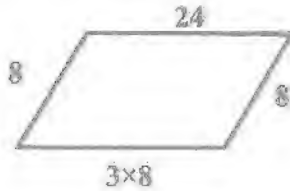
$m\angle D + m\angle C = 180°$ زاويتان داخليتان

$m\angle D + 30 = 180 \rightarrow m\angle D = 180 - 30 = 150°$

$m\angle A = m\angle C$ متقابلتان في متوازي اضلاع

$m\angle A = 30°$ بالتعويض

2) اوجد محيط متوازي الاضلاع اذا علمت ان طول احد اضلاعه 8 cm وطول ضلعهُ المجاور ثلاثة امثالهُ:



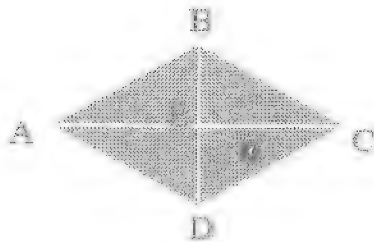
اذا كان طول احد اضلاع المتوازي = 8 cm

وطول ضلعه المجاور = 8 × 3 = 24 cm

ومحيط المتوازي = مجموع الاضلاع الاربعة 24 + 8 + 24 + 8 = 64 سنتميتر.

3) الشكل المجاور ABCD متوازي اضلاع فيه

m∠BCE + m∠ADE = 90° اثبت أن الشكل يمثل معين



$\overline{AC}$ ينصف زاوية BCD

$\overline{BD}$ ينصف زاوية ADC

$m\angle BCE = \frac{1}{2}\angle BCD$ بالتنصيف

$m\angle ADE = \frac{1}{2}\angle ADC$ بالتنصيف

اذن $m\angle DCE + m\angle CDE = 90°$ بالتعويض عما يساويها

اذن $m\angle BCD + m\angle ADC = 180°$

وهما زاويتان متتاليتان وكذلك $m\angle DEC = 180° - 90°$

$$m\angle DEC = 90° \rightarrow \overline{AC} \perp \overline{BD}$$

وكل ضلعان متجاوريين متساويين بالقياس لذلك الشكل (معين)

4) معين مساحتهُ 300 cm2 وارتفاعهُ 15 cm فما طول ضلعهُ.

مساحة المعين = طول ضلعهُ × ارتفاعهُ

$A = h \times L$

$300 = 15 \times L \rightarrow L = \frac{300}{15} = 20\ cm$ طول ضلعهُ

5) معين محيطهُ 36 cm فما طول ضلعهُ.

محيط المعين = 4 × طول الضلع

$P = 4L$

$36 = 4L \rightarrow L = \frac{36}{4} = 9\ cm$ طول الضلع

6) شبه منحرف طول القاعدتين المتوازيتين العليا والسفلى على التوالي 7 cm ، 9 cm وارتفاعه 3 cm فما مساحتهُ؟

$A = \frac{1}{2}(a + b) \times h$

$= \frac{1}{2}(7 + 9) \times 3$

$= \frac{1}{2} \times 16 \times 3$

$= 24\ cm^2$ مساحة شبه المنحرف

عزيزي الطالب
التقط هذا الباركود
وريح قلبك





7) شبه منحرف متساوي الساقين مساحتهُ 90 cm2 ارتفاعه 5 cm جد طول كل من قاعدتيه اذا علمت ان طول قاعدته العليا نصف قاعدته السفلى.

نفرض ان طول قاعدته العليا x فأن طول قاعدته السفلى = 2x.

$$A = \frac{1}{2}(a+b)h \rightarrow 90 = \frac{1}{2}(x+2x)5$$

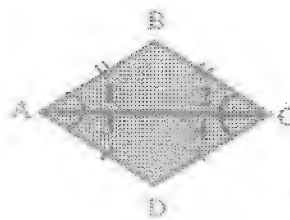
$$90 = \frac{1}{2}(3x)5 \rightarrow 180 = 15x$$

$x = \frac{180}{15} = 12cm$ طول القاعدة العليا

$2x = 2 \times 12 = 24\ cm$ طول القاعدة السفلى

تدرب وحل التمرينات:

8) الشكل المجاور فيه AB = BC ، $\overline{AC}$ منصف الزاويتين A ، C برهن ان الشكل ABCD يمثل متوازي اضلاع.



زاويتا قاعدة مثلث متساوي الساقين $AB = BC$ معطى $\rightarrow m\angle 1 = m\angle 2$

$m\angle 1 = m\angle 3\ ,m\angle 2 = m\angle 4$ بالتنصيف

$\therefore m\angle 3 = m\angle 4$ بالاستعاضة

$m\angle 2 = m\angle 3\ \ ,\ \ m\angle 1 = m\angle 4$ وكل منهما متبادلتان

أذن $\overline{AD}//\overline{BC}$ وأن $\overline{AB}//\overline{DC}$ فالشكل متوازي الاضلاع.

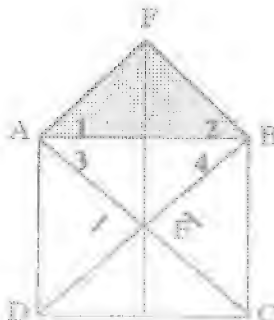
يكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع اذا كان كل ضلعين متقابلين متوازيين وكل زاويتين متقابلتين متساويتين بالقياس.

9) الشكل المجاور ABCD مربع ، AFB مثلث قائم الزاوية في F ومتساوي الساقين.

برهن أن:

i) AFBE يمثل مربعاً ii) $\overline{FE}$ ينصف $\overline{DC}$

iii) AFED يمثل متوازي اضلاع.



i) ΔAFB قائم الزاوية $AF = BF \rightarrow m\angle 1 = m\angle 2$

$m1 + m\angle 2 = 90°$

كذلك المثلث AEB متساوي الساقين لأن قطر المربع متعامدان ومتناصفان

اذن AE = BE وكل من $m\angle 3$, $m\angle 4$ متساويتان بالقياس حيث

AF // BE و FB // AE ← وكل منهما متبادلتان $m\angle 2 = m\angle 3$ و $m\angle 1 = m\angle 4$

فالشكل AFBE مربع (خواص مربع) لأن فيه زوايا قوائم.

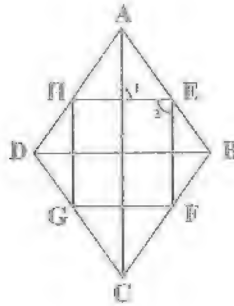
ii) $\overline{FE}$, $\overline{AB}$ قطران متناصفان ← $\overline{AB}$ ينصف $\overline{FE}$

$\overline{FE}$ ينصف $\overline{DC}$ لأنه AB// ← ضلعان متقابلان في مربع AB = DC

iii) $\overline{AF}//\overline{BE} \rightarrow \overline{AF}//\overline{ED}$, $\overline{FE} \perp \overline{DC}$, $\overline{AD} \perp \overline{DC}$ لأنه مربع

$\rightarrow \overline{FE}//\overline{AD}$ ← الشكل AFED متوزاي اضلاع

10) ABCD يمثل معيناً ، النقاط E,F,G,H منتصفات اضلاعه، برهن ان الشكل EFGH يمثل متوازي اضلاع.



البرهان : بما ان الشكل ABCD معين

فأ، AC ⊥ BD (القطران متعامدان)

HE // DB ويساوي نصفه
GF // DB ويساوي نصفه
} مبرهنة

∴ HE // GF

HE = GF

∴ الشكل الرباعي EFGH متوازي اضلاع لتساوي وتوازي ضلعين فيه

AC ⊥ HE فأن AC ⊥ DB لان $m\angle 1 = 90^{\circ}$

$m\angle 1 = m\angle 2$ متبادلتين.

∴ الشكل EFGH متوازي الاضلاع هو مستطيل لان احدى زواياه قائمة.

11) معين طول قطريه المتعامدين 10 cm ، 8 cm فما مساحته؟

مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ × حاصل ضرب طول قطريه.

$$A = \frac{1}{2} \times 8 \times 10 = 40\ cm^2$$



12) شبه منحرف طول القاعدتين المتوازيتين العليا والسفلى 20 cm , 16 cm ومساحته 180 cm^2 فما ارتفاعه؟

$$A = \frac{1}{2}(a+b) \times h$$

$$180 = \frac{1}{2}(16+20) \times h$$

$$180 = \frac{1}{2} \times 36h \quad \Rightarrow 180 = 18h \Rightarrow h = \frac{180}{18} = 10\ cm$$ الارتفاع

تدرب وحل مسائل حياتية:

13) ظرف بريدي: في الشكل المجاور ظرف بريدي اذا علمت ان عرض الظرف نصف طوله فما مساحة وجهة؟

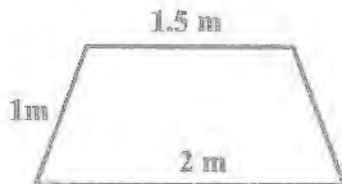


طول الظرف = 24 cm فأن عرض الظرف = 24 ÷ 2 = 12

مساحة الظرف = الطول × العرض

$$A = 12 \times 24 = 288\ cm^2$$

14) اثاث منزلي: سطح اللوح الخشبي المستخدم في المنضدة بشكل شبه منحرف متساوي الساقين احسب محيطهُ.



محيط شبه المنحرف = مجموع الاضلاع الاربعة

المحيط $P = 1 + 1 + 1.5 + 2 = 5.5\ m$

15) حديقة: قطعة ارض زراعية مستطيلة الشكل ، شجرّت لجعلها حديقة عامة ، اريد تحويطها بسياج، فاذا كانت ابعادها 80 m , 40 m فما طول السياج اللازم استعمالهُ لاحاطتها؟

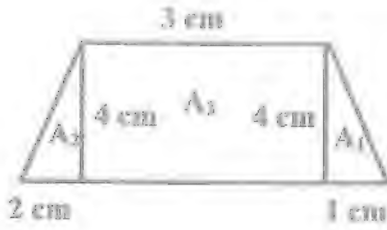
محيط المستطيل = (الطول + العرض) × 2

محيط الحديقة $P = (40 + 80) \times 2 = 120 \times 2 = 240\ m$

فكّر:

16) تحدٍّ: شبه منحرف طول قاعدته الصغرى 3 cm مقسم على ثلاث اشكال مثلثين ومستطيل يبلغ ارتفاع شبه المنحرف 4 cm وطول الضلع القائم للمثلث الاول 2 cm وطول الضلع القائم للمثلث الثاني 1 cm فأحسب مساحة شبه المنحرف بطريقتين.

الطريقة الاولى:



نحسب مساحة المستطيل مع المثلثين ومجموعهم مساحة شبه المنحرف.

مساحة المثلث الاول = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

$$A_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 2\ cm^2$$

مساحة المثلث الثاني = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

$$A_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4\ cm^2$$

مساح المستطيل = القاعدة × الارتفاع $A_3 = 4 \times 3 = 12\ cm^2$

مساحة شبه المنحرف $A = A_1 + A_2 + A_3 = 2 + 4 + 12 = 18\ cm^2$

الطريقة الثانية : مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ (القاعدة السفلى + القاعدة العليا) × h

مساحة شبه المنحرف $A = \frac{1}{2}\left((2+3+1)+3\right) \times 4 = \frac{1}{2} \times 9 \times 4 = 18\ cm^2$

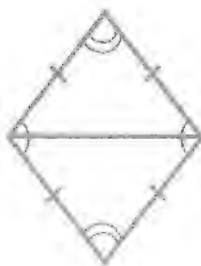
17) مسألة مفتوحة : هل يمكن اعتبار كل مستطيل متوازي اضلاع ولا يمكن اعتبار كل متوازي اضلاع مستطيلاً؟

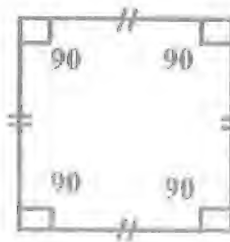
نعم كل مستطيل متوازي اضلاع لكن ليس كل متوازي اضلاع مستطيلاً (حسب خواص المستطيل ومتوازي الاضلاع).

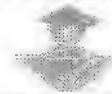
18) حس عدديّ : ما الفرق بين المعين والمربع؟ ارسم واشر الى الأجزاء المختلفة.

المعين : هو متوازي الاضلاع اضلاعهُ الاربعة متساوية وليست اي من زواياه قائمة.

المربع : هو متوازي اضلاع اضلاعه الاربعة متساوية وجميع زواياه قائمة.







اكتب : خواصّ شبه المنحرف المختلف الساقين وشبه المنحرف متساوي الساقين.

شبه المنحرف فيه ضلعان متوازيين يسميان القاعدة السفلى والقاعدة العليا.

والضلعان الآخران غير المتوازيان واذا كان الضلعان غير المتوازيين متساويين سمي شبه منحرف متساوي الساقين واذا اطوالهما مختلفان يسمى مختلف الساقين حسب التعريف (شبه المنحرف).

الدرس الخامس / الاسطوانة والكرة (الخصائص – المساحة السطحية – الحجم)

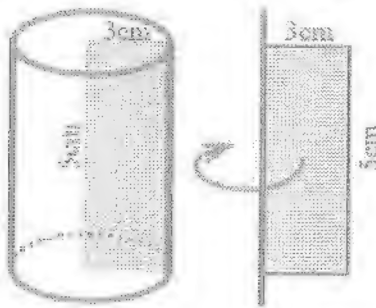
Cylinder and Sphere (properties , surface Area , volume)

فكرة الدرس : التعرف الى خصائص كل من الاسطوانة والكرة وكيفية ايجاد المساحة السطحية والحجم لكل منهما.

المفردات : نصف القطر ، الارتفاع ، المساحة الجانبية ، المساحة الكلية ، الحجم.

واليك المثال التالي:

تعلم : لدينا مستطيل ابعادة 5 cm , 3 cm ثبت على سلك معدني عمودي ودوّر كما مبين في الشكل باستخدام محرك نلاحظ تولد الشكل الذي نسميه بالاسطوانة الدائرية القائمة لاحظ ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة المتولدة وارتفاعها هما قيمة ابعاد المستطيل. خذ علبة مرطبات اسطوانية الشكل وتخلص من القاعدتين ثم قصها عمودياً وافرد القطعة المعدنية ستلاحظ انها تمثل شكل مستطيل.



الاسطوانة : Cylinder

وهي مجسم لهُ قاعدتان دائريتان متوازيتان ومتطابقتان محاطٌ بسطح جانبي اسطواني. ويسمى المستقيم المار بمركز القاعدتين (محور الاسطوانة) ويسمى المستقيم المماس للقاعدتين والموازي لمحور الاسطوانة (مولد الاسطوانة). مولدات الاسطوانة الواحدة متساوية فيما بينها بالطول، والعمود المحدد بقاعدتي الاسطوانة فأنه يسمى (ارتفاع الاسطوانة) يرمز لـه بالرمز h. واذا كان مولد الاسطوانة عمودياً على قاعدتها سميت الاسطوانة (اسطوانة قائمة). ويكون ارتفاعها مساوياً لمولدها واذا كان مولد الاسطوانة مائلاً على قاعدتيها سميت (اسطوانة مائلة).

حجم الاسطوانة الدائرية التامة $V = \pi r^2 h$ الحجم

المساحة الجانبية $LA = 2\pi r h$ (المساحة الجانبية)

المساحة الكلية تساوي مجموع المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين أي:

حيث πr^2 مساحة القاعدة $TA = 2\pi rh + 2\pi r^2$ (المساحة الكلية)

وأن r نصف قطر قاعدة الاسطوانة ، h الارتفاع ، π النسبة الثابتة $\frac{22}{7}$

مثال 1/ اسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها 7 cm ، وارتفاعها 12 cm أحسب مساحتها الجانبية ثم أحسب مساحتها الكلية وحجمها.



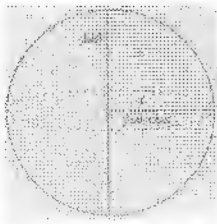
1) المساحة الجانبية $LA = 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 12 = 528\ cm^2$

2) المساحة الكلية $TA = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$$= 528 + 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 528 \times 308 = 836\ cm^2$$

3) الحجم $V = \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 12 = 1848\ cm^3$

الكرة / Sphere



وهي مجسم مستدير (محدد بسطح كروي) ومن خصائصه ان كل نقطة من نقاط سطحه تبعد بأبعاد متساوية عن نقطة ثابتة في داخلهِ تسمى (مركز الكرة) وكل مستقيم يمر بمركز الكرة وينتهي طرفاه بسطحها يسمى (قطر الكرة) اما (نصف قطر الكرة) فهو الخط الواصل بين المركز والسطح للكرة.

حجم الكرة: $V = \frac{4\pi}{3} r^3$ ، المساحة السطحية $SA = 4\pi r^2$

مثال 2/ جد المساحة السطحية والحجم لكرة نصف قطرها 7 cm

i) المساحة السطحية $SA = 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 616\ cm^2$

ii) الحجم $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$V = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7 = 1437\ cm^3$$



مثال 3/ حصالة نقود: صنع نموذج مصغر لحصالة نقود على شكل اسطوانة نصف قطر قاعدتها 10 cm وارتفاعها 30 cm تعلوها نصف كرة. احسب الحجم والمساحة السطحية لها.

حجم حصالة النقود = حجم الاسطوانة + حجم نصف الكرة

$$V = \pi r^2 h + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \pi (10)^2 \times 30 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi \times 10^3\right)$$

$$= 3000\pi + \frac{2000}{3}\pi = \frac{11000}{3}\pi \simeq 11513.33\ cm^3$$

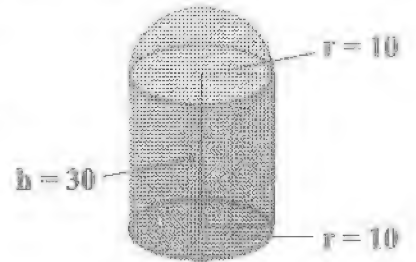
حيث $\pi = 3.14$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية للاسطوانة + مساحة قاعدة واحدة + نصف المساحة السطحية للكرة

$$TA = 2\pi r h + \pi r^2 + \frac{1}{2}(4\pi r^2)$$

$$TA = 2(3.14)(10)(30) + (3.14)(10)^2 + \frac{1}{2}(4)(3.14)(10)^2$$

$$= 1884 + 314 + 628 = 2826\ cm^2$$



تأكد من فهمك:

1) انبوب اسطواني دائري قائم مجوف طولهُ 21 m ونصف قطرهُ الداخلي 9 m فما حجمهُ؟

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع $V = \pi r^2 h$

حجم الانبوب $= (3.14) \times (9)^2 \times 21 = 3.14 \times 81 \times 21 = 5341.14\ m^3$

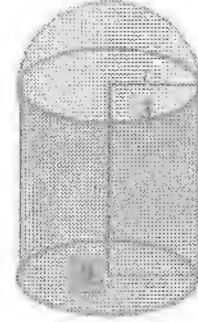
2) جد المساحة السطحية والحجم للكرة التي نصف قطرها 10 m؟

المساحة السطحية $SA = 4\pi r^2 = 4(3.14) \times 10^2 = 1256\ m^2$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times 10^3 = 4186.6\ m^3$$

3) صنع خزان للوقود على شكل اسطوانة نصف قطر قاعدتها 3 m وارتفاعها 9 m تعلوها نصف كرة احسب الحجم والمساحة السطحية للخزان.

الحجم = حجم الاسطوانة + نصف حجم الكرة



$$V = \pi r^2 h + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$V = 3.14 \times 3 \times 3 \times 9 + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times 3.14 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$= 254.34 + 56.52 = 310.86\ m^3$$

المساحة السطحية للخزان = المساحة السطحية للخزان + $\frac{1}{2}$ المساحة السطحية للكرة

$$TA = 2\pi rh + \pi r^2 + \frac{1}{2} \times 4\pi r^2$$

$$= 2 \times 3.14 \times 3 \times 9 + \frac{3}{14} \times 3 \times 3 + \frac{1}{2} \times 4 \times 3.14 \times 3 \times 3$$

$$= 169.56 + 28.26 + 56.52 = 254.34\ m^2$$

4) مستودع وقود كروي الشكل مساحته السطحية $576\pi\ m^2$ جد حجمهُ.

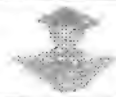
$$SA = 4\pi r^2 \rightarrow 576\pi = 4\pi r^2$$

$r^2 = \frac{576\pi}{4\pi} = 144 \rightarrow r = \sqrt{144} = 12\ m$ نصف القطر

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times 12^4 \times 12 \times 12 = 2304\pi\ m^3$ الحجم

5) اناء على شكل نصف كرة مساحته السطحية $128\pi cm^2$. جد حجمه.

$\therefore \frac{1}{2} \times {}^2 4\pi r^2 = 128\pi$ مساحة نصف الكرة $2\pi r^2 = 128\pi$ $r^2 = \frac{128}{2}$ $r^2 = 64$	$\therefore r = \sqrt{64} = 8cm$ نصف القطر $V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\ {}^2\pi r^3$ $= 2/3\pi(8)^3$ $V = \frac{1024}{3}\ \pi cm^3$ حجم نصف الكرة



5) اناء على شكل نصف كرة مساحته السطحية $128\pi cm^2$. جد حجمه.

$\frac{4}{3}\pi r^3 =$ حجم الكرة

$4\pi r^2 =$ المساحة السطحية الكرة

$A = \frac{1}{2}(4^2\ \pi r^2)$

$128\pi = 2\pi r^2$

$r^2 = \frac{128\pi}{2\pi} = 64$

$\therefore r = \sqrt{64} = 8cm$ نصف قطر الكرة

$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 =$ نصف الحجم الكرة

$V = \frac{4}{6}\pi(8)^3 = \frac{4\pi}{6_3} \times 512$

$\therefore V = \frac{1024\pi}{3}\ cm^3$

6) دورق اسطواني الشكل حجمهُ $128\pi\ cm^3$ وارتفاعه $8\ cm$ جد مساحتهُ الجانبية.

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع $\quad V = \pi\, r^2 h$

$128\pi = \pi\, r^2 \times 8 \Rightarrow 128\,\pi = 8\pi r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{128\pi}{8\pi} = 16$

$\Rightarrow r = \sqrt{16} = 4\ cm$

المساحة الجانبية للاسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع $\quad LA = 2\pi\, r\, h$

$= 2\pi\ \times 4 \times 8 = 64\pi\ cm^2$

7) اذا كانت نسبة حجم كرة نصف قطرها r_1 الى حجم كرة ثانية نصف قطرها r_2 تساوي $\frac{8}{125}$ جد نسبة المساحة السطحية للكرة الاولى الى المساحة السطحية للكرة الثانية.

$\frac{\frac{4}{3}\pi\, r_1^3}{\frac{4}{3}\pi\, r_2^3} = \frac{8}{125} \Rightarrow \frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{8}{125} \Rightarrow \frac{r_1}{r^2} = \frac{2}{5}$ بأخذ الجذر التكعيبي

$\frac{4\pi r_1^2}{4\pi\, r_2^2} = \frac{4\pi\ (2)^2}{4\,\pi\ (5)^2} = \frac{4}{25}$

تدريب وحل التمرينات:

8) كرة من الرصاص نصف قطرها 6 cm صهرت وصنع منها كرات صغيرة متماثلة لألعاب الإطفال نصف قطر كل منها 1 cm أحسب عدد الكرات الصغيرة المتولدة من ذلك.

الحل/ نجد حجم الكرة التي نصف قطرها 6 cm

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\times\pi\times 6^2\times 6\times 6=288\,\pi\ cm^3$$

نجد حجم الكرة الصغيرة التي نصف قطرها 1 cm

$$V=\frac{4}{3}\times\pi\times 1\times 1\times 1=\frac{4}{3}\pi\ cm^3$$

عدد الكرات = حجم الكرة الكبيرة ÷ حجم الكرة الصغيرة ⟸ $288\pi \div \frac{4\pi}{3}=216$

9) كرة خشبية حجمها $2304\pi cm^3$ وضعت في الماء فكان الجزء الطافي نصفها، جد نصف قطر دائرة تقاطع سطح الماء مع سطح الكرة.

الحل:

$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

$2304\pi=\frac{4}{3}\pi r^3$

$r^3=\frac{3\times 2304^{576}}{4}=3\times 576$

$r=12\ cm$ نصف قطر الدائرة

10) اذا علمت ان المساحة السطحية لكرة تساوي $1256\,\pi\ cm^2$ فما طول نصف قطر الكرة؟

المساحة السطحية للكرة = 4 × π × (نصف القطر)^2 $\quad SA=4\pi r^2$

$1256\pi=4\pi r^2 \rightarrow r^2=\frac{1256\pi}{4\pi}=314 \rightarrow r=\sqrt{314}=17.7\ cm$ نصف القطر

11) كرتان النسبة بين حجميهما كنسبة 27:8 جد النسبة بين مساحتي سطحيهما.

$\frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3}=\frac{8}{27}\rightarrow\frac{r_1^3}{r_2^3}=\frac{8}{27}\rightarrow\frac{r_1}{r_2}=\frac{2}{3}$ النسبة بين نصفي قطريهما



$$\frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \frac{4\pi(2)^2}{4\pi(3)^2} \rightarrow \frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \frac{4}{9}$$ النسبة بين مساحتي سطحيهما

12) جد نصف قطر الكرة التي مساحتها السطحية تساوي $100\pi \ cm^2$ ومن ثم جد حجمها

$$SA = 4\pi r^2 \rightarrow 100\pi = 4\pi r^2 \rightarrow r^2 = \frac{100\pi}{4\pi} = 25 \rightarrow r = 5$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow \frac{4}{3}\pi (5)^3 = \frac{4}{3}\pi (125) = \frac{500}{3}\pi \ cm^3$$ الحجم

13) قطعة ورق على شكل مستطيل طولهُ 33 cm وعرضهُ 14 cm طويت قاعدتهُ بحيث يكون سطح الورقة على هيئة سطح اسطواني دائري قائم جد حجم الاسطوانة الناشئة لاقرب عدد صحيح.

مساحة الورق (مستطيل) = الطول × العرض = 33 × 14 = 462 سنتمتر مربع

وهذه المساحة تمثل مساحة سطح اسطواني دائري ارتفاعها 14 سم

$$LA = 2\pi rh \rightarrow 462 = 2 \times \frac{22}{7} \times r \times 14^2$$

$$\rightarrow 462 = 88r$$

$$\rightarrow r = \frac{462}{88} = 5.25 \ cm$$ نصف قطر قاعدة الاسطوانة

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times (5.25)^2 \times 14^2 \simeq 1213.7 \ cm^3$$ الحجم

تدرب وحل مسائل حياتية /

14) سائل : جد سعة الكوب المجاور اذا علمت ان قطر القاعدة 7 cm وارتفاعه 10 cm .

(السعة يعني الحجم)



نصف قطر القاعدة = 7 ÷ 2 = 3.5 سم

$$V = \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times (3.5)^2 \times 10$$

$$= \frac{22^{11}}{7^2} \times 3.5 \times 3.5 \times 10 = 385 \ cm^3$$ حجم الكوب

15) صناعة : أحسب مقدار ما تتسع لهُ العلب الاسطوانية الاربعة المتماثلة الحجم اذا علمت ان نصف قطر قاعدتها 3.5 cm وأرتفاعها 10cm ثم جد المساحة اللازمة من اللوح المعدني المستخدم لصناعتها كلّها.

نجد حجم علبة واحدة ونضرب في 4 مقدار الاتساع.

حيث الارتفاع $h = 10$ $\quad 4V = 4\,(\pi r^2 h) \rightarrow 4V = 4 \times \pi \times 3.5^2 \times 10$

حجم العلب الاربعة $\rightarrow 4V = 490\pi\ cm^3$

نجد المساحة السطحية الواحدة $\quad LA = 2\pi rh = 2 \times \pi \times 3.5 \times 10$

$= 70\pi\ cm^2 \rightarrow 4SA = 70\pi \times 4 = 280\pi\ cm^2$

مساحة قاعدة العلبة = $12.25\pi = 3.5^2 \times \pi$

مجموع المساحة الكلية = المساحة السطحية + قاعدة العلبة (4 علب عليا وسفلى)

$= 12.25\pi \times 8 + 280\pi = 378\pi cm^2$

16) هندسة : من المباني الشهيرة في العالم بناية تعرف بأسم قبة مونتريال في كندا وهي كرة مستديرة من الزجاج الشفاف قطرها 76 m احسب مساحتها السطحية وحجمها.

نصف قط الكرة = $38 = 2 \div 76$

المساحة السطحية للكرة = 4 × النسبة الثابتة × (نصف القطر)^2

$SA = 4\pi\, r^2 = 4\frac{22}{7} \times 38 \times 38 = 18146.14\ m^2$

الحجم = $\frac{4}{3}$ × النسبة الثابتة × (نصف القطر)^3

$V = \frac{4}{3}\pi\, r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 38 \times 38 \times 38 = 229939.8\ m^3$

فكر: 17) تحدٍّ: كرة بلاستيكية نصف قطرها 14.7 cm طليت بطلاء بسمك 0.3 cm احسب حجم الكرة بعد الطلاء.

نضيف سمك الطلاء الى نصف قطر الكرة فنحصل على نصف قطر الكرة مع الطلاء ثم نجد حجمها.

نصف قطر الكرة بعد الطلاء $14.7 + 0.3 = 15\ cm$

حجم الكرة بعد الطلاء $\quad V = \frac{4}{3}\pi\, r^3 = \frac{4}{3}\pi \times 15^5 \times 15 \times 15 = 4500\pi\ cm^3$

18) مسألة مفتوحة: ما ارتفاع اسطوانة دائرية قائمة تكفي مساحتها الجانبية لصنع كرة لها نصف قطر الإسطوانة نفسه؟

المساحة الجانبية للاسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع

$LA = 2\pi rh$

المساحة السطحية للكرة = 4 × النسبة الثابتة × (نصف القطر)^2

$SA = 4\pi r^2$

$LA = SA \rightarrow 2\pi rh = 4\pi r^2 \rightarrow h = \frac{4\pi r^2}{2\pi r}$

$\therefore h = 2r$

19) حسّ عددي: كأس بشكل نصف كرة نصف قطرها r ووعاء اسطواني الشكل نصف قطر قاعدته r وارتفاعه r أي منهما يتسع لأكبر كمية من الماء.

$V\left(\text{حجم الكأس}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$

$V\left(\text{للاسطوانة}\right) = \pi r^2 \times h = \pi r^2 \times r = \pi r^3$ حجم الاسطوانة اكبر من حجم الكأس

20) صحح الخطأ: كتبت ساره قانون حجم الكرة ($\frac{3}{4}\pi r^3$) اكتشف خطأ ساره وصححه.

حجم الكرة ($\frac{4}{3}\pi r^3$) وهو الصحيح أما خطأ ساره هو $\frac{3}{4}$

أكتب : مثالاً لأسطوانتين قائمتين متساويتين بالحجم ومختلفتين بالمساحة الكلية.

اسطوانة نصف قطر قاعدتها 3 cm وارتفاعها 6 cm

اسطوانة نصف قطر قاعدتها $\sqrt{6}\ cm$ وارتفاعها 9 cm

متساويتان بالحجم ومختلفتان بالمساحة الكلية.

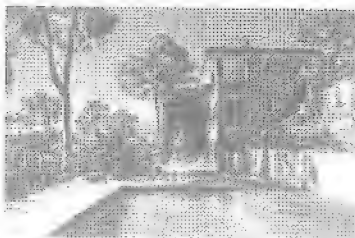
(حاول عزيزي الطالب تجد كل من الحجم والمساحة الكلية لكل منهما)

الدرس السادس / مساحة الاشكال المركبة المنتظمة وغير المنتظمة

Area of Regular an Irregular compound shapes

فكرة الدرس: ايجاد مساحة الاشكال المستوية المركبة المنتظمة وغير المنتظمة

المفردات :شكل مستوي بسيط وشكل مستوي مركب.



واليك المثال التالي:

تعلم :نريد حساب مساحة الممر المحيط بالمسبح الموضح بالصورة على ص 26 نتبع الخطوات التالية:

نحدد الشكلين المستويين البسيطين اللذين يتكون منهما هذا الشكل المركب وهما مستطيلان:

نجد مساحة المستطيل الداخلي. نجد مساحة المستطيل الخارجي.

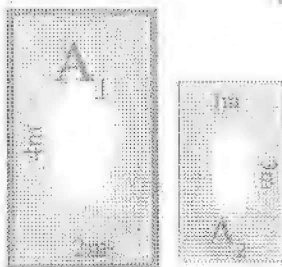
- نجد مساحة الممر عن طريق مساحة المستطيل الداخلي من مساحة المستطيل الخارجي.

مساحة الاشكال المستوية المركبة المنتظمة.

المستوى المركب المنتظم يتكون من شكلين مستويين بسيطين او اكثر.

ولايجاد مساحتهُ نقسم الشكل المستوي المركب المنتظم الى اشكال مستوية بسيطة.

مثال 1/ حاول ايجاد مساحة الممر في الشكل المركب في فقرة تعلم:



نجد مساحة المستطيل الخارجي $A_1 = h.L = 4 \times 2 = 8\ m^2$

نجد مساحة المستطيل الثاني $A_2 = h.L = 3 \times 1 = 3\ m^2$

مساحة الممر تساوي حاصل طرح المستطيل الداخلي من مساحة المستطيل الخارجي اي: $A = A_1 - A_2 = 8 - 3 = 5\ m^2$

مثال 2/ لحساب مساحة الشكل المركب المنتظم المجاور:

الشكل المركب المنتظم يحتوي هما شبه المنحرف والمستطيل

مساحة شبه المنحرف $A_1 = \frac{1}{2}(a+b) \times h$



$$= \frac{1}{2}(7+3) \times 2 = 10\ cm^2$$

مساحة المستطيل $A_2 = h\,.\,L = 5 \times 6 = 30\ cm^2$

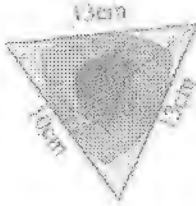
مساحة الشكل المركب $A = A_1 + A_2 = 10 + 30 = 40\ cm^2$

- مساحة الاشكال المستوية المركبة غير المنتظمة:

المستوي المركب غير المنتظم يتكون من شكلين مستويين بسيطين او اكثر غير منتظمين

لايجاد مساحتهُ نقسم الشكل المستوي المركب غير المنتظم الى اشكال مستوية منتظمة بسيطة قريبة من شكلهِ نحسب قيمة مساحات الاشكال المستوية البسيطة ونجمع نتائجها وتحتسب بوصفها قيمة تقريبية للشكل المستوي المركب غير المنتظم.

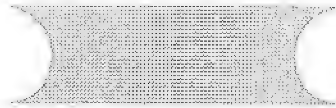
مثال 3/ في الشكل المجاور نموذج لعملة احدى الدول وهي مصممة على شكل مستوي غير منتظم ولحساب قيمة تقريبية لمساحة سطح العملة رسمنا مثلث متساوي الساقين تمس اضلاعه منحني العملة وثبتنا قياسات الاضلاع وارتفاع المثلث كما موضح بالشكل.



نحسب مساحة المثلث $A = \frac{1}{2} \times b \times h = \frac{1}{2} \times 10 \times 12 = 60\ cm^2$

ونظراً لكون مساحة سطح العملة اقل من مساحة سطح المثلث نقرب الناتج ونقول : أن مساحة سطح العملة يساوي تقريباً اقل من $60\ cm^2$.

مثال 4/ لحساب مساحة الشكل المظلل المجاور



نقسم الشكل الى الشكلين المستويين البسيطين اللذين يتكون منهما الشكل المركب هما مستطيل ونصفا دائرة متماثلتان (يمكن عدهما دائرة واحدة)

مساحة المستطيل $A_1 = h \times L = 4 \times 12 = 48\ m^2$

مساحة نصفي الدائرة $A_2 = \pi r^2 = 3.14 \times 2^2 = 12.56\ m^2$

اي اعتبرنا نصفي الدائرة هي دائرة واحدة لأنهما متماثلين

مساحة الشكل المظلل تساوي حاصل طرح الدائرة من مساحة المستطيل

$$A = A_1 - A_2 = 48 - 12.56 = 35.44\ m^2$$

مثال 5/ جد مساحة سطح الشكل المستوي المركب المبين ادناه

يتكون الشكل المركب من مربعين متماثلين ودائرتين متماثلتين (اربعة انصاف دائرة متماثلة)

مساحة المربع: $A_1 = L^2 = 1 \times 1 = 1\ m^2$

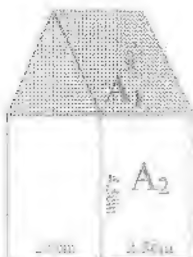
مساحة الدائرة $A^2 = \pi r^2 = 3.14 \times (0.5)^2 = 0.785\ m^2$

مساحة الشكل المظلل = 2 مربع + 2 دائرة

$$A = 2A_1 + 2A_2 = 2 \times 1 + 2 \times 0.785 = 3.57\ m$$

تأكد من فهمك: جد مساحة السطح المظلل لكل من الاشكال المستوية المركبة الآتية:

1) مساحة الجزء العلوي وهو شبه منحرف قاعدته السفلى $2.5 + 2.5 = 5$ cm وارتفاعه 2 cm وطول قاعدته العليا 2.5 cm ومساحتهُ A1



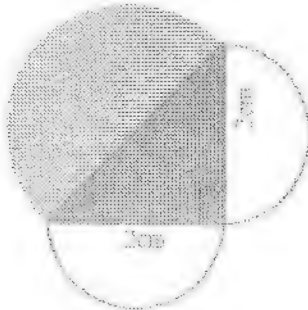
$$A_1 = \frac{1}{2}(a + b) \times h = \frac{1}{2}(2.5 + 5) \times 2 = 7.5\ cm^2$$

ومساحة المستطيل طول قاعدته $5 = 2.5 + 2.5$ وارتفاعه 4.5 cm ومساحتهُ A_2

$$A_2 = 5 \times 4.5 = 22.5\ cm^2$$

مساحة الشكل $A = A_1 + A_2 = 7.5 + 22.5 = 30\ cm^2$

2)مساحة الشكل تمثل مساحة المثلث فمساحة نصف دائرة كبيرة ومساحة نصفي الدائرة الصغيرة.



نفرض مساحة المثلث A_1

نفرض مساحة نصف الدائرة الكبيرة A_2

نفرض نصفي الدائرة الصغيرة وتمثل دائرة واحدة A_3

مساحة المثلث $A_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2cm^2$

قطر الدائرة الكبيرة يمثل وتر المثلث

من نظرية فيثاغورس $L^2 = 2^2 + 2^2 = 8$

قطر الدائرة $L = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ cm$

نق $\sqrt{2}\ cm$

مساحة $\frac{1}{2}$ الدائرة الكبيرة $A_2 = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 \pi \Rightarrow 3,14\ cm^2$

مساحة نصفي الدائرة الصغيرة $A_3 = 1^2 \times \pi = 3,14$

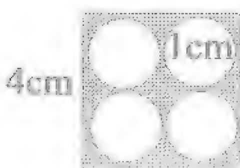
المساحة الكلية $A_t = A_1 + A_2 + A_3$

$= 2 + 3,14 + 3,14 = 8,28$

3) نجد مساحة المستطيل والمثلث

مساحة المستطيل = القاعدة × الارتفاع

$$A_1 = 24 \times 8 = 192\ mm^2$$



طول قاعدة المثلث $24 - (6 + 6) = 12\ mm$

ارتفاع المثلث $16 - 8 = 8\ mm$

مساحة المثلث $A_2 = \frac{1}{2} \times 8 \times 12 = 48\ mm^2$

المساحة الكلية $A = A_1 + A_2 = 192 + 48 = 240\ mm^2$

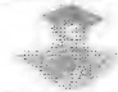
4cm

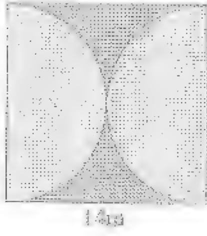
1cm

4) مساحة الشكل المظلل يساوي مساحة المربع - مساحة الدوائر الاربعة

$$A = A_1 - A_2 = (4 \times 4) - 4(3.14 \times 0.5 \times 0.5)$$

$$= 16 - 4 \times 0.79 = 16 - 3.16 = 12.84\ cm^2$$





5) نجد مساحة الجزء المظلل.

i) نجد مساحة المربع $A_1 = 14 \times 14 = 196\ m^2$

ii) نجد مساحة نصفي الدائرة وهما متماثلتان فيحسبان دائرة واحدة

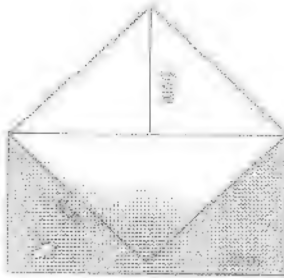
$$A_2 = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times (7)^2 = 154\ m^2$$

حيث $r = 14 \div 2 = 7$

مساحة المظلل $A = A_1 - A_2 = 196 - 154 = 42\ m^2$

تدرب وحل التمرينات:

6) جد مساحة سطح الظرف البريدي مفتوح من جهة واحدة المبين في الشكل المجاور:



نجد طول ab من مبرهنة فيثاغورس $(ae)^2 = (ab)^2 + (be)^2$

$100 = (ab)^2 + 36 \rightarrow (ab)^2 = 100 - 36 = 64 \rightarrow ab = 8$

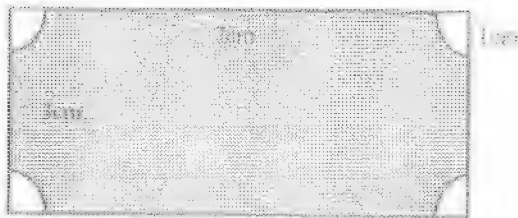
نجد مساحة المستطيل A_1 حيث $A_1 = 12 \times 8 = 96\ cm^2$

ثم نجد مساحة المثلث A_2 قاعدته 12 cm وارتفاعه 6 cm

$$A_2 = \frac{1}{2} \times 12 \times 6 = 36\ cm^2$$

مساحة سطح الظرف $A = A_1 + A_2 = 96 + 36 = 132\ cm^2$

7) جد مساحة السطح المظلل.



مساحة المستطيل = الطول × العرض

الطول = 1 + 1 + 7 = 9

العرض = 1 + 1 + 3 = 5

∴ مساحة المستطيل الكلي = 5 × 9

$A = 5 \times 9 = 45\ cm^2$

مساحة كل زاوية (ربع دائرة) حيث نصف القطر = 1سم

$$A = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi(1)^2 = \frac{1}{4}\pi$$

مساحة جميع الزوايا في الشكل $A = 4 \times \frac{1}{4}\pi = \pi$

مساحة الشكل المظلل = مساحة المستطيل – مساحة الزوايا الاربعة

$$A = 15 - \pi = 45 - 3.14 = 41.86\ cm^2$$

8) جد تقريباً مناسباً لمساحة سطح المفتاح.

نجد مساحة الدائرة A_1 $\quad A_1 = \pi r^2$

$$A_1 = \frac{3}{14} \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3.14 \times \frac{25}{4} = 19.6\ cm^2$$

نجد مساحة المثلث A_2 حيث ارتفاعه 6.5 وقاعدته 2

$$A_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6.5 = 6.5\ cm^2$$

نجد مساحة المستطيل الذي طوله 2 cm وعرضه 1.5وهو A_3

$$A_3 = 2 \times 1.5 = 3\ cm^2$$

مساحة مفتاح $A = A_1 + A_2 + A_3$

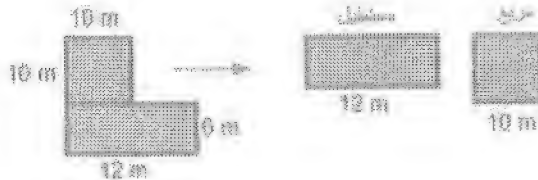
$$= 19.6 + 6.5 + 3$$

$$= 29.1\ cm^2 \text{ تقريباً}$$

يعني مساحة سطح المفتاح اقل تقريباً من 29.1 سم^2

تدرب وحل مسائل حياتية:

9) ادناه صور لمسبح مع مخطط لشكل سطحة المستوي المركب. أحسب مساحة سطح المسبح:



نجد مساحة المستطيل A_1 $\quad A_1 = 12 \times 6 = 72\ m^2$

نجد مساحة المربع A_2 $\quad A_2 = (10)^2 = 100\ m^2$

A مساحة سطح المسبح = $A_2 + A_1$

$$A = 72 + 100 = 172\ m^2$$



10) في الشكل المجاور خريطة أحدى الدول وهي بلا شك تمثل شكلاً مستوياً مركباً غير منتظم ولغرض تقدير المساحة على الخارطة رسم شكلان مستويان بسيطان هما شبه المنحرف والمثلث للاحاطة بحدود الخريطة، مستخدماً الابعاد المثبتة على الشكل. جد تقريباً مناسباً للمساحة على الخريطة.

نجد مساحة شبه المنحرف



$$A_1 = \frac{1}{2}(a+b) \times h = \frac{1}{2}(290+450) \times 140$$

$$= \frac{1}{2}(740 \times 140) = 51800\ km^2$$

نجد مساحة المثلث

$$A_2 = \frac{1}{2} \times 230\ \times 280 = 32200$$

مساحة الخريطة A

$$A = A_1 + \ A_2 = 51800 + 32200$$

تقريباً $A = 84000\ km^2$

فكر : 11) تحدَّ بالشكل المجاور بركة محاطة بممر من البلاط عرضهُ 2 m احسب مساحة البلاط.

نحسب نصف محيط المربع مضافاً اليه محيط نصف الدائرة الاولى والثانية ونضرب في 2 متر.



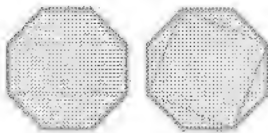
الممر الذي يحيط المربع $12 + 12 = 24$ m

محيط نصف الدائرة $P = \frac{1}{2}(2\pi r) = \frac{1}{2} \times 2 \times 3.14 \times 6 = 18.84\ m$

$\therefore 24 + 18.84 + 18.84 = 61.68\ m$ المحيط $\rightarrow 61.68 \times 2 = 123.36\ m^2$

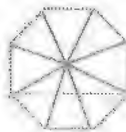
مساحة الممر

مسألة مفتوحة / الشكل يوضح طريقتان لايجاد مساحة مضلع منتظم ذي ثمانية اضلاع. اشرح مضمون الطريقتين ثم ابحث عن طريقة ثالثة.



الطريقة الاولى: نحسب مساحة المربع الاوسط + مساحة المثلثات الاربعة

الطريقة الثانية: نحسب مساحة المستطيل الاوسط ثم نحسب مساحة شبه المنحرف الاعلى والاسفل.



الطريقة الثالثة : نقسم المثمن الى مثلثات عدد 8 ونحسب مساحة مثلث واحد ثم نضربه بالعدد 8 والناتج يمثل مساحة المثمن.

12) حس عددي: هل يمكن حساب مساحة الدائرة بشكل تقريبي عن طريق رسم مستطيلات متجاورة داخلها ماذا يحدث عندما نجعل عدد المستطيلات المرسومة كبير جداً؟

الجواب / نعم يمكن ونحصل على مساحة للدائرة اكبر بقليل من مجموع مساحة المستطيلات.



اكتب : صيغة رياضية لحساب شكل مستوي مركب مؤلف من k من المعينات مرسومة متجاورة مع بعضها والتي طول كل من قطريها كل من m , n من الوحدات.

$$A = \frac{1}{2}(a\,m \times b\,n)$$

حيث a عدد الاقطار الافقية للمعينات

b عدد الاقطار العمودية للمعينات

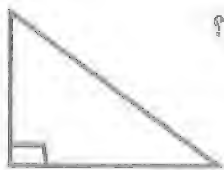
3 4 3 4

ففي المثال $A = \frac{1}{2}\,(2m \times 2\,n)$

الدرس السابع / خطة حل المسألة (الإستدلال المنطقي)

Problem solving plan (logical in ference)

فكرة الدرس : **استعمال الاستدلال المنطقي في حل المسألة.**



تعلم: **الشكل المجاور مثلث قائم الزاوية ما العلاقة بين الزاويتين الحادتين في المثلث القائم؟**

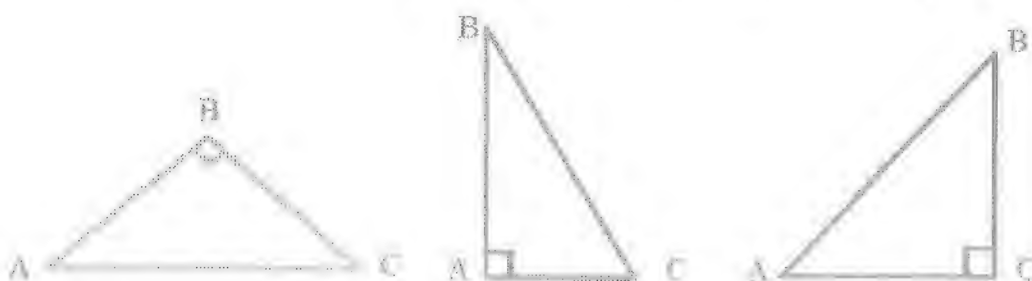
أفهم : **ما المعطيات في المسألة؟ مثلث قائم الزاوية اي احدى زواياه °90.**

ما المطلوب من المسألة؟ ايجاد العلاقة بين الزاويتين الحادتين في المثلث القائم.

خطط: **كيف تحل المسألة؟ ارسم عدة مثلثات قائمة الزاوية واستعمل مجموع زوايا المثلث للاستدلال على العلاقة بين الزاويتين الحادتين.**

حل: **بما أن مجموع قياس زوايا المثلث °180 في كل حالة وان المثلث قائم الزاوية فأن مجموع قياسي الزاويتين الحادتين في اي مثلث قائم هو °90 اي ان الزاويتين الحادتان في المثلث القائم الزاوية يكونان (متتامتان)**

لأن مجموع اي زاويتان قياسهما °90 تسميان (زاويتان متتامتان)





تحقق : مجموع قياس الزاويتان الحادتان + قياس الزاوية القائمة = $90° + 90° = 180°$

اذن الحل صحيح.

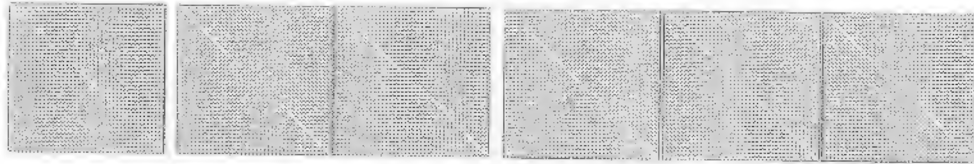
مسائل /

1) ارسم عدة مستطيلات واقطارها ثم قس الاقطار

ماذا تستنتج عن طولي القطرين بالمستطيل؟

مجموع طول القطرين = 2 × الجذر التربيعي لمجموع مربعي طولي الضلعين القائمين.

2) رتبت المثلثات القائمة الزاوية لتكون النمط الموضح بالشكل التالي فاذا كانت مساحة كل مثلث يساوي $12\ cm^2$ فأوجد مساحة النمط المتكوّن في الشكل الثالث.



الحل/ بما ان الشكل الثالث مؤلف من 6 مثلثات اذن مساحته تكون $6 \times 12 = 72\ cm^2$

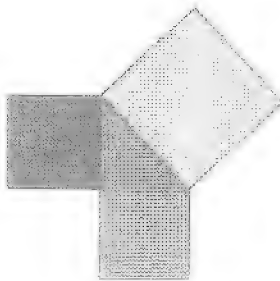
3) استخدم اسلوب الاستدلال المنطقي لتخمين قياس كل من الزاويتين الحادتين في اي مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين. واستنتج من ذلك العلاقة بين هاتين الزاويتين.

ما المطلوب في المسألة؟ مثلث قائم الزاوية متساوي الساقين والمطلوب استنتاج علاقة بين الزاويتين الحادتين.

مجموع زوايا المثلث = $180°$ وبما ان المثلث قائم الزاوية اي احدى زواياه $90°$ فأن مجموع الزاويتين الحادتين $180° - 90° = 90°$ وبما انهما متساويتان بالقياس لأن المثلث متساوي الساقين فأن قياس كل منهما $\frac{90°}{2} = 45°$.

اذن فالمثلث القائم الزاوية المتساوي الساقين يكون قياس كل زاوية حادة منهُ $45°$.

التحقق: $90° + 45° + 45° = 180$ اذن الجواب صحيح.



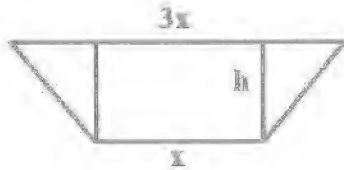
4) استخدم اسلوب الاستدلال المنطقي لتقدير العلاقة بين اضلاع مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين واستنتج من ذلك صيغة خاصة لمبرهنة فيثاغورس.

الحل/ تنشأ على كل ضلع مربعاً وتجد مساحة كل منهما فنجد ان مساحة المربع المنشأ على الوتر يساوي مجموع المساحتين المنشأين على الضلعين القائمين الآخرين

فلو كان طول الوتر a وطول كل من الضلعين المتساويين القائمين b فأن $a^2 = b^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$

(شكل ص31) المربع المنشأ على الوتر = ضعف المربع المنشأ على احد الضلعين القائمين.

5) استخدم اسلوب الاستدلال المنطقي لتقدير مساحة شبه منحرف متساوي الساقين طول قاعدته العليا ثلاثة امثال طول قاعدته السفلى واستنتج من ذلك صيغة خاصة لقانون المساحة عندما يكون طول احد القاعدتين من مضاعفات طول القاعدة الاخرى.



اذا كان طول القاعدة السفلى = x

فأن طول القاعدة العليا = 3x

$$A = \frac{1}{2}(x + 3x)h = \frac{1}{2}(4x)h$$

$$\therefore A = 2xh$$

Chapter Review (مراجعة الفصل)

المفردات : تحفظ من الكتاب ص32 مهمة جداً.

الدرس الاول : علاقات الزوايا والمستقيمات (نظريات)

مثال/ استعمل المعطيات في الشكل المجاور وبين أن $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{M}$	تدريب: استعمل المعطيات في الشكل المجاور:
$m\angle 1 = 60^\circ$ زاويتان متقابلتان الزاويتان 120°، 1 داخليتان وعلى جهة واحدة من القاطع ومجموعهما 180° اذن $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{M}$ عكس مبرهنة الزوايا الداخلية 	اذ $m\angle 1 = m\angle 2$ بين أن $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{M}$ $m\angle 2 = m\angle 3$ بالتقابل متساويتان اذن $m\angle 1 = m\angle 3$ لأن $\angle 1, \angle 2$ متساويتان بالقياس معطى. وبما أن $\angle 3, \angle 1$ متناظرتان اذن $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{M}$ عكس مبرهنة الزوايا المتناظرة 

الدرس الثاني تطابق المثلثات

مثال / جد قيمة x , y ليكون $\Delta ABC \cong \Delta BCD$

بما ان المثلثين متطابقين اذن تتساوى اطوال الاضلاع المتناظرة اي:

$2x + 8 = 12 \rightarrow 2x = 12 - 8$

$2x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$

$31y - 16 = 15$

$31\,y = 15 + 16$

$31\,y = 31$

$y = \frac{31}{31} = 1$

تدريب / بالشكل الاسفل وضح لماذا لا يتطابق المثلثان ΔABC ، $\Delta A'B'C'$

لأنه لا تنطبق على هذه الحالة اي حالة من حالات التطابق لمثلثين (ض ض ض) ، (ض ز ض) (ز ض ز) ، (وتر ، زاوية قائمة ، ضلع)

الدرس الثالث / خواص المثلث (متساوي الساقين ، متساوي الاضلاع ، قائم)

مثال 1 / جد طول الوتر في المثلث ABC المبين بالشكل المجاور

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$X^2 = (5)^2 + (12)^2$

$X^2 = 25 + 144$

$X^2 = 169$

AC طول الوتر $X = 13$ cm

مثال 2/ مثلث متساوي الاضلاع محيطة 144 cm جد طول كل ضلع.

المثلث المتساوي الاضلاع هو المثلث الذي تكون اضلاعه الثلاثة متساوية بالقياس لذلك يكون طول الضلع يساوي

$144 \div 3 = 48$ cm

تدريب 1/ في المثلث المتساوي الساقين ABC اذا علمت ان $CAB = 32°$ المحيط 20 cm جد قيمة x وطول كل ضلع وقياس الزاويتين الباقيتين.

$AC + BC + AB = 20$

وبما ان المثلث متساوي الساقين

$2(2x + 6) + (7 - 3x) = 20$

$4x + 12 + 7 - 3x = 20$

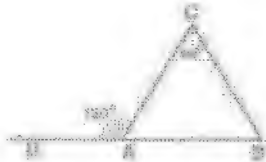
$X = 20 - 19 = 1$

$AC = AB = 2 \times 1 + 6 \Rightarrow = 8$

$BC = 7 - 3x = 7 - 3x \times 1 = 4$

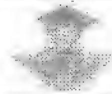
$m\angle B = m\angle C = \frac{180° - 32°}{2}$

$m\angle B = m\angle C = 74°$ قياس زوايا القاعدة

	تدريب 2/ في المثلث ABC : $m\angle ACB = 60^\circ$ $m\angle CAD = 120^\circ$ اثبت ان المثلث ABC متساوي الاضلاع  $m\angle CAB = 180^\circ - 120 = 60^\circ$ متجاورتان $m\angle CBA = 180 - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$ مجموع زوايا المثلث 180° لذلك المثلث متساوي الاضلاع لأن زواياه متساوية

الدرس الرابع / متوازي الاضلاع والمعين وشبه المنحرف.

مثال1 / متوازي اضلاع طول قاعدته 8 cm وارتفاعه 5 cm جد مساحتهُ. المساحة = طول القاعدة × الارتفاع $A = b \times h = 8 \times 5 = 40\ cm^2$ مثال 2/ جد محيط ومساحة معين منتظم طول ضلعهُ 6 cm وارتفاعه 7 cm المساحة $A = h \times b = 7 \times 6 = 42\ cm^2$ المحيط $P = 4 \times b = 4 \times 6 = 24\ cm$ **ملاحظة: هناك خطأ في المثال حيث لا يمكن ان يكون ارتفاع المعين اكبر من طول الضلع**	تدريب 1/ جد مساحة معين طول قطريه المتعامدين 6 cm , 8 cm. مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب قطريه $A = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24\ cm^2$



مثال 1/ جد مساحة شبه المنحرف الذي طولي ضلعين متوازيين فيه 12 cm ، 8 cm وارتفاعه 4 cm.

$$A = \frac{1}{2}(a+b) \times h = \frac{1}{2}(12+8) \times 4$$

المساحة $A = 40\ cm^2$

تدريب 2/ شبه منحرف متساوي الساقين مساحته $64\ cm^2$ وارتفاعه 8 cm جد طول كل من قاعدتيه اذا علمت ان طول قاعدته العليا ثلاث امثال طول قاعدته السفلى.

$$A = \frac{1}{2}(a+b) \times h$$

لنفرض طول قاعدته السفلى x فأن طول قاعدته العليا $3x$

$$\therefore 64 = \frac{1}{2}(x+3x)8$$

$$64 = 16x \rightarrow x = \frac{64}{16} = 4$$

∴ طول القاعدة السفلى = 4 سم

طول القاعدة العليا = 4 × 3 = 12 سم

تدريب 3/ في الشكل التالي متوازي اضلاع قياس احدى زوايا °118 احسب قياسات بقية الزوايا.



كل زاويتان متقابلتان في متوازي اضلاع متساويتان بالقياس.

$$\therefore m\angle D = m\angle B = 118^\circ$$

$\angle B$, $\angle C$ داخليتان وعلى وجهة واحدة من القاطع فهما متكاملتان °180

$$m\angle C = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$$

متقابلتان في متوازي $m\angle C = m\angle A = 62^\circ$

الدرس الخامس / الاسطوانة والكرة (الخصائص ، المساحة السطحية ، الحجم)

مثال 1 / اسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها 10 cm وارتفاعها 6 cm احسب مساحتها الكلية وحجمها.

المساحة الكلية: $TA = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2(3.14)(10)(6) + 2(3.14)(10)^2$

$\therefore TA = 1004.8\ cm^2$

$320\pi\ cm^2$

الحجم: $V = \pi r^2 h = (3.14) * (10)^2 * (6) = 1884\ cm^3$

تدريب 1/ ما المساحة الجانبية لدورق اسطواني الشكل حجمه $256\pi\ cm^3$ وارتفاعه 16 cm؟

الحجم $V = \pi r^2 h$

$256\pi = \pi * r^2 * 16 \rightarrow 256\pi = 16\pi r^2$

$\rightarrow r^2 = \frac{256\pi}{16\pi} = 16 \rightarrow r = \sqrt{16} = 4\ cm$ نصف قطر قاعدة الاسطوانة

$LA = 2\pi rh = 2\pi\ (4) \times 16$ المساحة الجانبية

$LA = 128\pi\ cm^2$

تدريب 2 / صنع خزان ماء على شكل اسطوانة قطر قاعدتها 8 m ، وارتفاعها 12 m تعلوها نصف كرة احسب الحجم والمساحة السطحية للخزان.

نجد مساحة الخزان والحجم بتقسيم الشكل الى اسطوانة ونصف كرة.

الحجم : حجم الاسطوانة $V = 2\pi r^2 h = 2\pi\ \left(\frac{8}{2}\right)^2 \times 12$

$V = 384\,\pi\ m^3$

$V = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{2}{3}\pi\ (4)^3$ حجم نصف الكرة

$V = 42.7\,\pi\ m^3$

$V\ (\text{الخزان}) = 384\pi + 42.7\,\pi = 426.7\,\pi\ m^3$ حجم الخزان

$TA = 2\pi rh + \pi r^2$ المساحة السطحية للاسطوانة (قاعدة واحدة)

$= 2\pi(4).12 + \pi\ (4)^2 = 96\pi = 16\pi = 112\pi\ m^2$

$= \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi \times 16 =$ المساحة السطحية لنصف الكرة

$A = 32\pi\ m^2$

$TA = 112\pi + 32\pi = 144\ \pi\ m^2$ المساحة الكلية للخزان

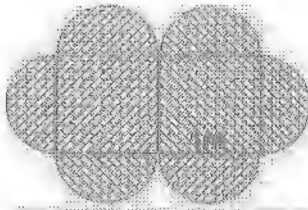
وكذلك نستطيع أن نجد المساحة الكلية والحجم بخطوة واحدة

$V = \pi r^2 h + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi\right) r^3$ الحجم

$TA = (2\pi r h + \pi r^2) + (2\pi r^2)$ المساحة الكلية

الدرس السادس / مساحة الاشكال المركبة المنتظمة وغير المنتظمة.

مثال1/ جد مساحة سطح الشكل المستوي المركب في ادناه



مساحة المربع $A_1 = L^2 = 1^2 = 1\ m^2$

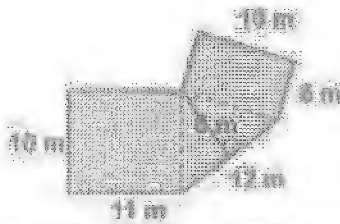
مساحة الدائرة $A_2 = \pi r^2 = 3.14 \times (0.5)^2 = 0.785\ m^2$

مساحة الشكل المضلل تساوي مساحة مربعين وثلاث دوائر.

$A = 2A_1 + 3A_2 = 2(1) + 3\ (0.785)$

$$A = 4.355\ m^2$$

تدريب 1 / جد مساحة ارضية الصالة المبينة في الشكل.



مساحة المستطيل الاول $A_1 = 10 \times 11 = 110\ m^2$

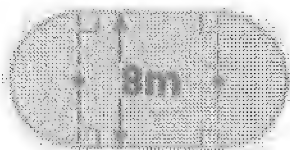
مساحة المثلث $A = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48\ m^2$

مساحة المستطيل الثاني $A_3 = 10 \times 6 = 60\ m^2$

مساحة الصالة هي مجموع المساحات الثلاثة $A = A_1 + A_2 + A_3$

$A = 110 + 48 + 60 = 218\ m^2$

تدريب 2/ ما مساحة سطح حوض السباحة في الشكل.



مساحة المربع = $8 \times 8 = A_1 = 64\ m^2$

مساحة الدائرة = وهي عبارة عن نصفي الدائرة من الطرفين

$$A_2 = \pi r^2 = \pi \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16\pi = 16\ (3.14) = 50.24\ m^2$$

مساحة الحوض = $A_1 + A_2 \leftarrow A = A_1 + A_2 = 64 + 50.24 = 114.24\ m^2$

تدريب 3 / جد مساحة الشكل المركب الآتي.



نقسم الشكل الى مستطيل مساحة A_1

وشبه منحرف مساحته A_2

مساحة المستطيل $A_1 = 20 \times 6 = 120\ cm^2$

ارتفاع شبه المنحرف $8 - 6 = 2$ cm

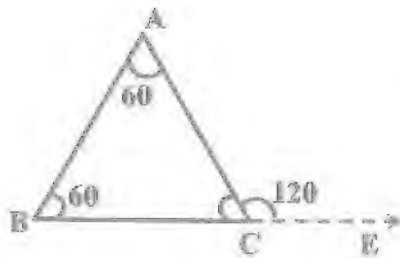
مساحة شبه المنحرف $A_2 = \frac{1}{2}(20 + 10) \times 2 = 30\ cm^2$

$A = A_1 + A_2$

مساحة الشكل المركب $A = 120 + 30 = 150\ cm^3$

(أختبار الفصل الخامس Chapter 5 Test)

1) مثلث متساوي الاضلاع. رسمنا المستقيم CE على امتداد الضلع BC جد m∠ACE.



الحل/ بما ان المثلث متساوي الساقين فأن قياس كل زاوية من زوايا

°60 لأن مجموع زوايا المثل °180.

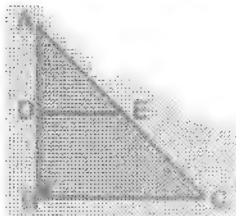
$m\angle BCA = 60°$

زاويتان متجاورتان على $m\angle BCA + m\angle ACE = 180°$

مستقيم واحد

$$60° + m\angle ACE = 180° \rightarrow m\angle ACE = 180° - 60 = 120°$$

2) في الشكل المجاور $\overline{DE}//\overline{BC}$ ، AB = BC اثبت ان المثلث ADE متساوي الساقين.



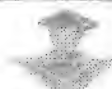
بما ان AB = BC فأن $m\angle A = m\angle C$

$\overline{DE}//\overline{BC}$ معطى فأن $m\angle AED = m\angle C$ متناظرتان

بالاستعاضة $\therefore m\angle A = m\angle AED$

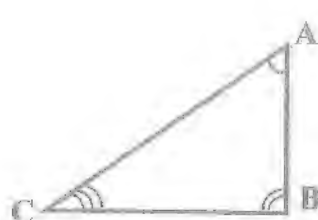
اذن AD = DE (لتساوي زاويتي القاعدة)

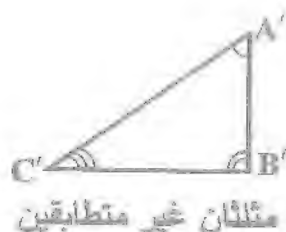
لذلك المثلث ADE متساوي الساقين



3) اعط مثالاً مع الرسم تبين فيه عدم امكانية تطابق مثلثين تتساوى فيهما قياسات الزوايا المتناظرة.

مثلثان متشابهان هما مثلثان تتساوى فيهما الزوايا المتناظرة بالقياس لكنها غير متطابقين





مثلثان غير متطابقين

$$m\angle C = m\angle C'$$

$$m\angle A = mA'$$

$$m\angle B = m\angle B'$$

اكمل الفراغات الآتية لتكون العبارة صائبة:

4) تكون الزاويتان متطابقتان اذا كان لهما نفس القياس.

5) عناصر المثلث الستة هي ثلاث زوايا و ثلاث اضلاع.

6) تتطابق المضلعات اذا امكن وضع احدهما على الآخر بحيث تتطابق الزوايا والاضلاع المتناظرة.

7) حالات تطابق مثلثين هي ض.ض.ض و ض.ز.ض و ز.ض.ز وحالة رابعة هي وتر وضلع وزاوية قائمة.

8) شبه منحرف متساوي الساقين مساحتهُ $180\ cm^2$ وارتفاعه $10\ cm$ جد طول كل من قاعدتيه اذا علمت ان طول قاعدتهُ العليا اربعة امثال طول قاعدته السفلى.

افرض طول القاعدة العليا x فأن طول القاعدة العليا 4x

$$A = \frac{1}{2}(a+b).h$$ مساحة شبه لمنحرف

$$180 = \frac{1}{2}(x+4x).10 = 25\,x \Rightarrow x = \frac{180}{25} = 7.2\ cm$$ طول القاعدة السفلة

$4 \times 7.2 = 28.8\ cm$ طول القاعدة العليا

9) جد محيط ومساحة معين منتظم طول ضلعه $4\ cm$ وارتفاعه $6\ cm$.

$A = h \times L \Rightarrow A = 4 \times 6 = 24\ cm^2$ مساحة المعين

$P = 4 \times L \Rightarrow P = 4 \times 4 = 16\ cm$ المحيط

ملاحظة: لا يمكن ان يكون ارتفاع المعين اكبر من طول الضلع وهذا خطأ في السؤال.

10) معين طول قطريه المتعامدين $2.5cm$ ، $4cm$ فما مساحته؟

$A = \frac{1}{2} \times 4^2 \times 2.5 = 2 \times 2.5 = 5cm^2$

11) صنع مصباح منضدي على شكل اسطوانة نصف قطر قاعدتها 8 cm وارتفاعها 12cm تعلوها نصف كرة. احسب الحجم والمساحة السطحية له؟

المساحة الكلية = المساحة الجانبية للأسطوانة + مساحة قاعدة واحدة + $\frac{1}{2}$ مساحة الكرة

$$TA = 2\pi rh + \pi r^2 + \frac{1}{2}(4\pi r^2)$$

$$= 2\pi \times 8 \times 12 + \pi \times 8^2 + 2\pi \times 8^2 = 192\,\pi + 64\pi + 128\,\pi = 384\,\pi\ cm^2$$

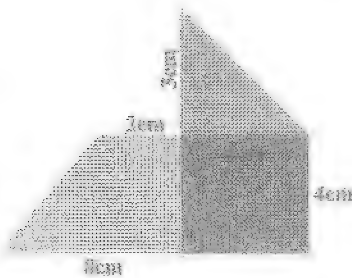
المساحة السطحية

الحجم = حجم الاسطوانة + $\frac{1}{2}$ حجم الكرة $\quad V = \pi r^2 h + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \pi(8)^2 \times 12 + \frac{2}{3}\pi\,(8)^3 = 768\pi + 341.3\pi = 1109.3\pi\ cm^3$$

12) جد المساحة الشكل المركب الاتي:

نقسم الشكل الى اشكال ونجد مساحة كل واحد منها ثم نجمع المساحات وهي تمثل مساحة الشكل



A_1 مساحة المربع $A_1 = 4 \times 4 = 16\ cm^2$

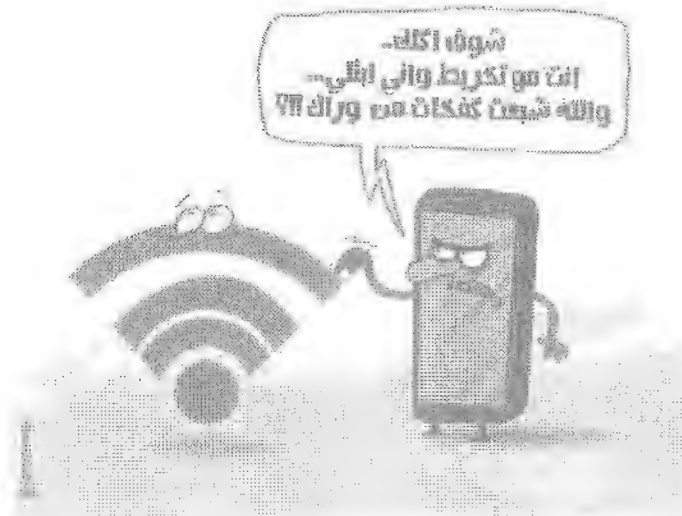
A_2 مساحة المثلث $A_2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6\ cm^2$

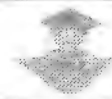
A_3 مساحة شبه المنحرف $A_3 = \frac{1}{2}(8 + 2) \times 4 = 20\ cm^2$

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

المساحة الكلية للشكل $A = 16 + 6 + 20 = 42\ cm^2$

انتهى الفصل الخامس





(الفصل السادس)

الهندسة الأحداثية Coordinate Geometry

الدرس الاول : تمثيل جدول دالة محددة في المستوى الأحداثي.

الدرس الثاني : مقدمة في الدوال.

الدرس الثالث : الدوال الخطية.

الدرس الرابع: الانعكاس والدوران في المستوى الاحداثي.

الدرس الخامس : الانسحاب في المستوى الاحداثي.

الدرس السادس: خطة حل المسألة

(الخطوات الاربعة)

(الأختبار القبلي)

أكتب عبارة جبرية تمثل:

1) اقل من y بخمسة عشر. $y - 15 = x$

2) اكثر من N بثلاثة عشر. $N + 13 = M$

3) $T - 3$ مقسوم على $T + 3$ $(T-3) \div (T+3)$ أو $\frac{T-3}{T+3}$

4) 7^2 مضروب في $L - 9$ $7^2\,(L-9)$

5) ضعف $w - 9$ مضروب في 5 $[2\,(9-w)] \times 5$

6) نصف $w + 9$ مضروب في y $\left[\frac{1}{2}(w+9) \times y\right]$

7) ربع $T + 5$ مقسوم على T $\left[\frac{1}{4}(T+5)\right] \div T = \frac{T+5}{4T}$

8) الجذر التكعيبي لـ $L - 3T$ مضروب في $w + 2$ $\left(\sqrt[3]{L-3T}\right)(2+w)$

9) اذا كانت قاعدة الدالة $2w - w^2$ والمدخلات $\{1, 0, -1\}$ اكتب المخرجات للدالة:

المخرجات $\{-3, 0, 1\}$

10) اكتب قاعدة الدالة للمدخلات والمخرجات

المدخلات	قاعدة الدالة x^2	المخرجات
1	$(1)^2$	1
2	$(2)^2$	4
3	$(3)^2$	9
−1	$(-1)^2$	1
−2	$(-2)^2$	4

المدخلات	قاعدة الدالة $2 - x$	المخرجات
2	$2 - 2$	0
0	$2 - 0$	2
−2	$2 - (-2)$	4

11) قاعدة الدالة $2y + |y|$ انشئ جدولاً بيّن فيه المخرجات إذ المدخلات $\{-1, 0, 1\}$

المخرجات	قاعدة الدالة $|y| + 2y$	المدخلات
3	$|-1| + 2(1) = 3$	-1
0	$|0| + 2(0) = 0$	0
3	$|1| + 2(1) = 3$	1

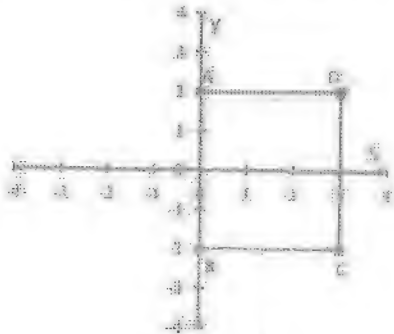
12)

المخرجات	قاعدة الدالة $x - 2$	المدخلات
1	$3 - 2 = 1$	3
2	$4 - 2 = 2$	4
3	$5 - 2 = 3$	5

مثل الازواج في المستوي الاحداثي وارسم قطعاً مستقيمة لتصل بين النقاط في كل ربع، اذكر اسم الشكل الذي حصلت عليه.

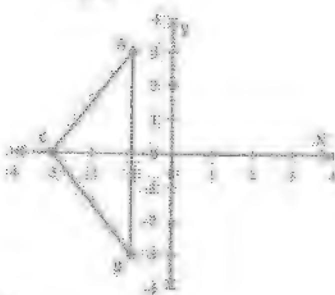
13) $A(0, 2), B(0, -2), C(3, -2), D(3, 2)$

الشكل الناتج مستطيل



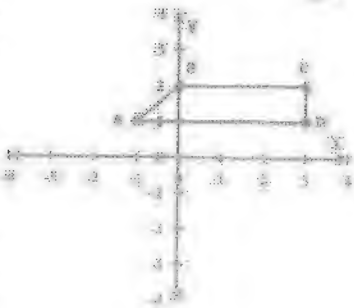
14) $A(-1, 3), B(-1, -3), C(-3, 0)$

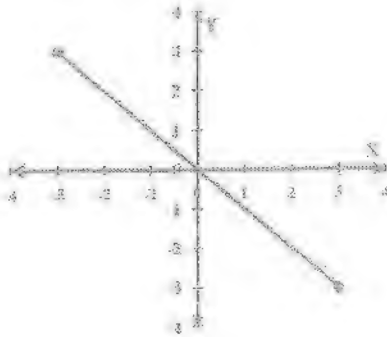
الشكل الناتج مثلث متساوي الساقين



15) $A(-1, 1), B(0, 2), C(3, 2), D(3, 1)$

الشكل الناتج شبه منحرف





النقطة (3 , 3−) الاحداثي السيني 3 -

الاحداثي الصادي 3

النقطة (3− , 3) الاحداثي السيني 3

الاحداثي الصادي 3 -

ولتوضيح ذلك على مستقيم الاعداد

يعني من خلال الرسم ان النقطة (3- , 3) هي انعكاس في نقطة الاصل للنقطة (3 , 3-)

تمثيل جدول دالة محددة في المستوى الاحداثي

Representing Table function in coordinate plane

فكرة الدرس : تمثيل جدول دالة محددة في المستوى الاحداثي.

المفردات : المدخلة ، المخرجة ، جدول دالة ، المستوي الاحداثي ، الارباع الاربعة.

اليك المثال التالي لتوضيح فكرة الدرس.

مثال : أراد علي ان يقيس درجة حرارة الماء في اناء بالدرجة المئوية ففي الساعة الاولى وجد ان درجة حرارة الماء 3°C وفي الساعة الثانية كانت درجة الحرارة للماء 3°C فجد درجة الحرارة للماء بدرجة مئوية بعد سبع ساعات.

تمثيل الدوال في المستوى الاحداثي

- العلاقة التي مدخلاتها متغيرة ومخرجاتها ثابتة تمثل دالة مستقيم يوازي محور السينات

- العلاقة التي مدخلاتها ثابتة ومخرجاتها متغيرة تمثل دالة مستقيم يوازي محور الصادات

- العلاقة التي مدخلاتها ومخرجاتها متغيرة تمثل مستقيم لا يوازي اي المحورين.

المدخلات هي القيم التي تعوض في الدالة والمخرجات هي ناتج الدالة بعد التعويض



[illegible]

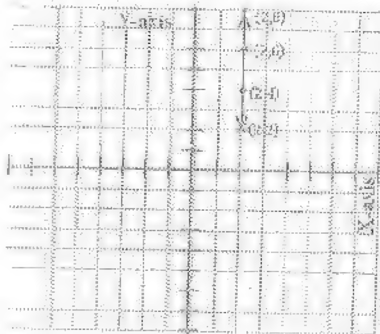
نفرض ان عدد الساعات x ونفرض ان درجة الحرارة للماء في كل ساعة مساوية لـ y فنحصل على الجدول الآتي:

نستعمل الجدول لايجاد الازواج المرتبة

(1,3) , (2,3) , (3,3) , (4,3) ,(5,3),(6,3) , (7,3)

نعين النقط في المستوى الاحداثي ثم نصل بين النقط فنحصل على مستقيم موازي لمحور السينات (قيم x متغيرة ، قيم y ثابتة)

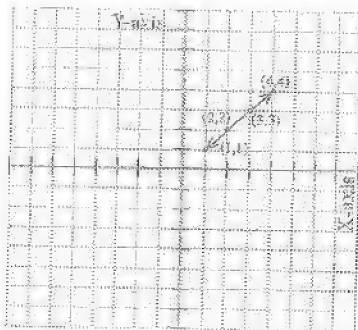
x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	3	3	3	3	3	3



[illegible]

x	2	2	2	2
y	2	4	6	8

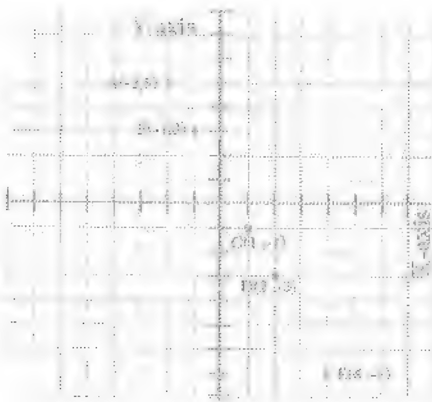
من الجدول نلاحظ ان قيم x ثابتة ومنة نكون ازواجاً مرتبة ,(2,4) , (2,2) (2,8) , (2,6) تمثل النقاط على المستوي ثم نصل بين النقاط نلاحظ ان المستقيم موازي لمحور الصادات (قيم x ثابتة قيم y متغيرة) .



[illegible]

عدد الايام x	1	2	3	4
كمية النفط y	1	2	3	4

– كتابة جدول من نقاط معينة في المستوي الاحداثي.



مثال4/ اكتب جدول الدالة من نقاط معينة في المستوي الاحداثي من الشكل المجاور نحدد الازواج المرتبة لكل نقطة ، A(-2,5) , B(-1,3) , C(1,-1) , D(2,-3) , E(4,-7)

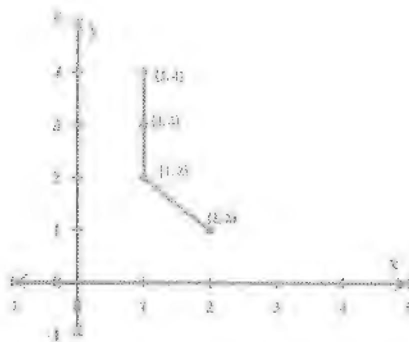
النقاط	A	B	C	D	E
x	-2	-1	1	2	4
y	5	3	-1	-3	-7

تأكد من فهمك : مثل الجداول التالية في المستوي الاحداثي، ثم صل بين النقاط في المستوي الاحداثي، ماذا تلاحظ ، وما الشكل الناتج؟

1)

x	2	1	1	1
y	1	2	3	4

نعين النقاط من الجدول: , (1,3) , (1,2) , (2,1) (1,4) ثم نثبت هذه النقاط على المستوي الاحداثي) ماذا نلاحظ؟

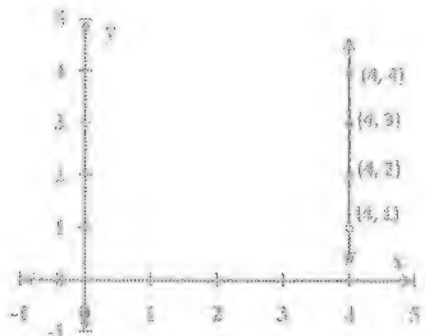


لا تمثل خط مستقيماً.

2)

x	4	4	4	4
y	1	2	3	4

من الجدول نعين النقاط , (4,3) , (4,2) , (4,-1) (4,4) (قيم x ثابتة قيم y متغيرة) ثم نعين هذه النقاط على المستوي نلاحظ أنها تمثل خط مستقيم // محور الصادات.

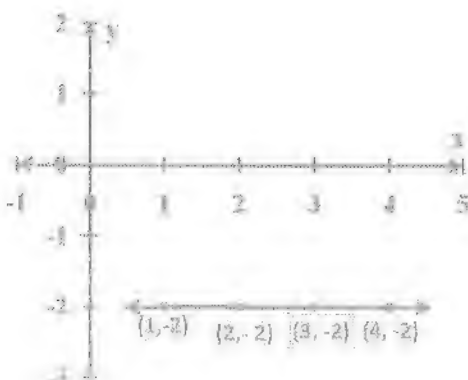


3)

x	1	2	3	4
y	-2	-2	-2	-2

من الجدول نعين النقاط , (2,-2) , (1.-2) (4,-2) , (3,-2) (قيم x متغيرة قيم y ثابتة)

نعين النقاط على المستوي نحصل على مستقيم / محور السينات

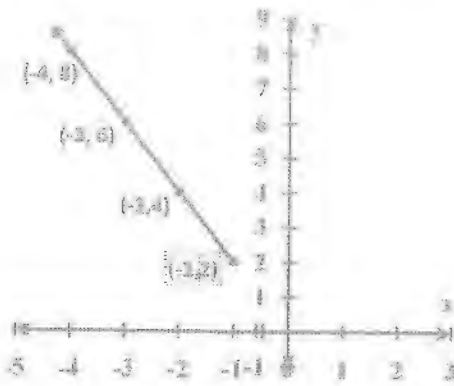




4)

x	-1	-2	-3	-4
y	2	4	6	8

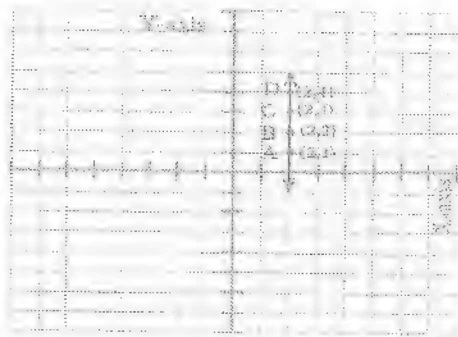
من الجدول نعين النقاط



(-4,8) , (-3,6) , (-2,4) , (-1,2) قيم x متغيرة ، قيم y متغيرة نعين النقاط على المستوي الاحداثي ى يحصل على مستقيم يوازي اي من المحورين.

5) اكمل الجدول للدالة من نقاط معينة في المستوي الاحداثي:

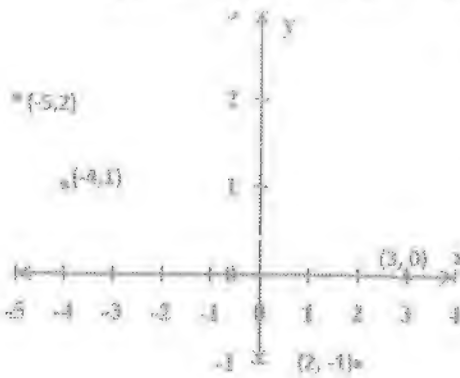
النقاط	A	B	C	D
x	2	2	2	2
y	1	2	3	4



من المستوي الاحداثي (الشكل على ص40) نجد النقاط , A(2,1) , B(2,2) , C(2,3) D(2,4) والقيم الاولى لكل نقطة تمثل x والقيم الثانية تمثل y نلاحظ قيم x ثابتة وقيم y متغيرة فهذه النقاط تمثل خط مستقيم // محور الصادات.

6) تدرب وحل التمرينات: مثل الجداول التالية في المستوي الاحداثي ، ثم صل بين النقاط ، ما علاقة المستقيم بالمحور النسبي.

x	-5	-4	3	2
y	2	1	0	-1

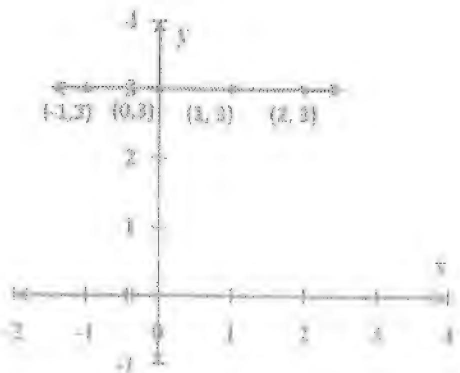


من الجدول نعين النقاط (-5,2) , (-4,1) , (3,0) , (2,-1) نثبتها على المستوي الاحداثي قيم x متغيرة قيم y متغيرة

لا تمثل اي مستقيم / المحورين

7)

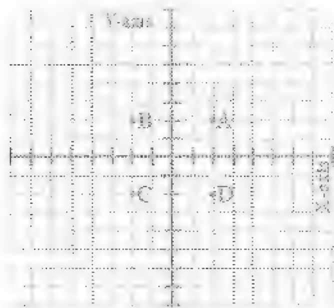
x	-1	0	1	2
y	3	3	3	3



من الجدول نعين النقاط (2,3) , (1,3) , (0,3) , (-1,3) ثم نثبت على المستوي الاحداثي. قيم x متغيرة قيم y ثابتة فالمستقيم / محور السينات.

اكتب جدول دالة من نقاط معينة في المستوى الاحداثي ، وبين نوع الشكل الناتج.

8)

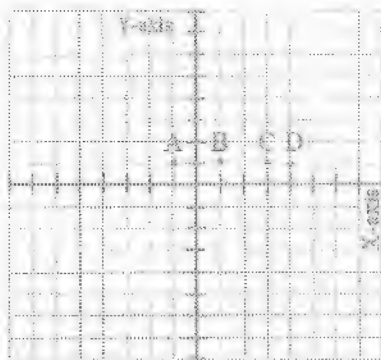


A(2,2) , B(-2,2) , C(-2 , -2) , D(2,-2)

الشكل الناتج مربع

النقاط	A	B	C	D
x	2	-2	-2	2
y	2	2	-2	-2

9)



A(-1,1) , B(1,1) , C(3,1) , D(4,1)

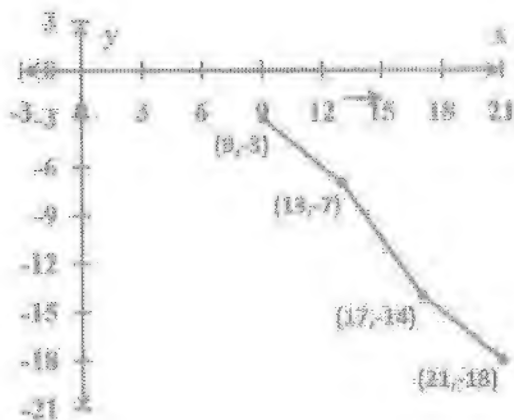
قيم x متغيرة وقيم y ثابتة

الشكل الناتج مستقيم يوازي محور السينات

النقاط	A	B	C	D
x	-1	1	3	4
y	1	1	1	1

10) علوم الارض : سجل باحث علمي في القطب الجنوبي أربع قراءات لدرجة الحرارة وكانت قراءة المحرار كل اربع ساعات.

الدالة التي يمثلها الجدول اعلاه واكتب جدول الدالة

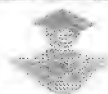


النقاط هي: (9,-18) , (5,-14) , (1,-7) , (9,-3)

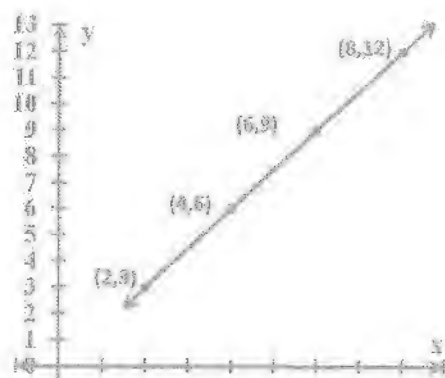
الوقت	9 صباحاً	1 ظهراً	5 عصراً	9 مساءاً
درجة الحرارة	-3	-7	-14	-18

	9	13	17	21	
x	9	+12 1	+12 5	+12 9	الوقت
y	-3	-7	-14	-18	درجة الحرارة

وحينما تحول الساعات الى نظام 24 فتصبح (21,-18) , (17,-14) , (-13,-7) , (9,-3)



11) تصميم الكتروني : صممت علا صفحة الكترونية رسمت فيها مستطيلات متماثلة في جدول الدالة التالية معطيات عن طول وعرض كل مستطيل رسمتهْ علا (x تمثل الطول ، y تمثل العرض)



a) مثل جدول الدالة في المستوي الاحداثي.

b) كيف يستعمل هذا الجدول لايجاد طول مستطيل بعد معرفة ان عرض المستطيل هو 15 وحدة؟

النقاط هي (2,3),(4,6),(6,9),(8.12)

x	2	4	6	8
y	3	6	9	12

حسب الجدول ان x تزداد قيمها اثنان في كل حقل وهي طول وأن y تزداد 3 في كل حقل وهي عرض فإذا اضفنا 3 الى 12 يصبح 15 وهو الذي يمثل العرض فأن 2 + 8 =10 وهو الذي يمثل الطول.

لذلك اذا كان عرض المستطيل 15 فأن طول المستطيل = 10

فكر: 12) جدول : اكتب جدول دالة يمثل المسافة الي يقطعها سائق دراجة هوائية خلال 4 ساعات علماً انهْ يقطع في الساعة الواحدة 15 كم.

الوقت	1	2	3	4
المسافة	15	30	45	60

فالمسألة التي يقطعها خلال اربع ساعات 15 + 15 + 15 + 15 = 60 كم.

13) اكتب مجموعة بيانات تمثل مستقيما عموديا

الحل/

x	2	2	2	2	2
y	1	3	4	5	6

{(1,2) , (3,2) (4,2) , (5,2) , (6,2)}

14) تحد: كيف يمكن من خلال جدول دالة محددة ان احصل على مستقيم موازي لمحور السينات؟

الجواب: اذا كان قيم x متغيرة وقيم y ثابتة نحصل على مستقيم يوازي محور السينات.

حس عددي: يطبع علاء في الساعة الواحدة 50 كلمة على الطابعة فاذا كان عدد الكلمات في الصفحة التي يريد طبعها 400 كلمة فإلى كم ساعة يحتاج؟

في الساعة الاولى	في الساعة الثانية	الثالثة	الرابعة	الخامسة	السادسة	السابعة	الثامنة
50	50	50	50	50	50	50	50

ولو جمعنا الكلمات = 400 لذلك يحتاج الى 8 ساعات هذا حسب جدول الدالة وللتحقق 8 = 50 ÷ 400.

اكتب: مسألة ابتكر فيها جدول دالة محددة بنقاط معينة تمثل عدد الايام التي يقضيها عامل لحصر بئر خلال 5 أيام؟

يصل الحفر في اليوم الاول يحفر 2 متر

وفي اليوم الثاني يحفر 2 متر

وفي الثالث يحفر 2 متر

وفي اليوم الرابع 2 متر

وفي اليوم الخامس يحفر 2 متر لذلك خلال 5 أيام يحفر 10 أمتار.

الايام	1	2	3	4	5
مقدار الحفر (متر)	2	4	6	8	10

الدرس الثاني / مقدمة في الدوال Introduction of functions

فكرة الدرس: تمثيل الدالة بعدد من النقاط في المستوى الاحداثي.

المفردات : الدالة – جدول الدالة – قاعدة الدالة – العنصر – الصورة.

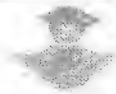
واليك المثال التالي لتوضيح فكرة الدرس.

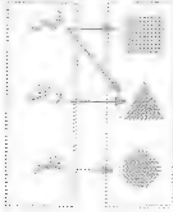
تعلم: في مرسم المدرسة رسم أيمن ووائل وثامر اشكالاً هندسية فرسم ايمن مربع ومثلثاً ورسم وائل مثلثاً فرسم ثامر دائرة فجد العلاقة بين كل طالب والشكل الهندسي الذي رسمه.

العلاقة والدالة : Relation and function

الدالة : هي علاقة تحدد قيمة مخرجة واحدة فقط لكل قيمة مدخلة.

قاعدة الدالة : هي الصيغة التي تستعمل لتعويض قيمة مدخلة للحصول على قيمة مخرجة.





مثال 1/ ارسم مخطط العلاقة بين كل طالب والشكل الهندسي الذي رسمهُ نلاحظ ان ايمن رسم شكلين هندسيين (مربع ، مثلث) اي لهُ مخرجان لمدخلة واحدة لذلك فالعلاقة لا تمثل دالة.

مثال 2/ حدد فيما اذا كانت كل علاقة فيما يلي دالة ام لا؟ وفسر ذلك.

{(1,2) , (3,4) , (5,6) , (7,8) , (9,10)}

امثل العلاقة بالمخطط المجاور:

نلاحظ أن كل مدخلة لها مخرجة واحدة فقط لذلك فأن العلاقة تمثل دالة.

ملاحظة: **تسمى العلاقة دالة اذا كان لكل مدخلة مخرجة حسب قاعدة الدالة. واذا وجدت مدخلة ليس لها مخرجة تسمى علاقة وليست دالة.**

مثال3/ لاحظ المخطط المجاور وبين أتمثل العلاقة دالة أم لا؟ أفسر ذلك.

نلاحظ بأن العلاقة ليست دالة الا اذا كانت لكل قيمة مدخلة هناك مخرجة واحدة فقط كذلك اذا كان لمدخلة اكثر من مخرجة.

مثال 4/ حدد فيما اذا كانت كل علاقة فيما يلي دالة أم لا؟ وفسر ذلك.

i) {(1,9) , (2,18) , (3,15) , (4,18)} **نلاحظ ان العلاقة دالة لأن هناك مخرجة واحدة فقط لكل مدخلة.**

ii) {(-1,5) , (0,6) , (-1,6) , (2,8)} **نلاحظ انها علاقة وليست دالة لأن هناك مخرجين 5،6 للمدخلة 1-**

- أكمال جدول الدالة:

جدول الدالة : هو الجدول الذي ينظّم قيمة المدخلة والمخرجة.

مثال 5/ اكمل جدول الدالة $y = x - 3$ اذا ان $x = -1 , 0 , 1 , 2$

نكمل جدول الدالة بالتعويض عن قيم x في قاعدة الدالة لنجد قيم y المناظرة وكما يلاحظ في الجدول المجاور.

مخرجة الصورة	قاعدة الدالة	مدخلة العنصر
y	$x - 3$	x
-4	$-1-3$	-1
-3	$0-3$	0
-2	$1-3$	1
-1	$2-3$	2

- تمثيل الدالة بعدد من النقط في المستوي الاحداثي.

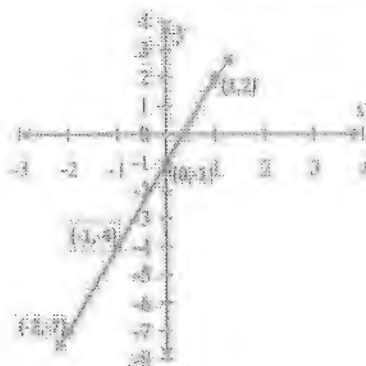
مثال 6/ مثل في المستوي الاحداثي الدالة $y = 3x - 1$ اذا ان $x = -1, -2, 0, 1$

خطوة (1) : نعمل الجدول ادناه.

خطوة (2) : نثبت النقاط في المستوي الاحداثي.

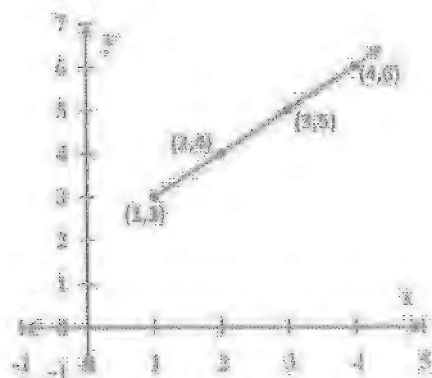
خطوة (3): نصل بين النقاط في المستوي الاحداثي سنحصل على مستقيم كما مبين في الشكل ادناه:

الزوج المرتب	الصورة (المخرجة)	قاعدة الدالة	العنصر (المدخلة)
(x , y)	y	3x − 1	x
(−1, −4)	− 4	3 (−1) −1	−1
(−2, −7)	− 7	3 (−2) −1	−2
(0, −1)	−1	3 (0) −1	0
(1,2)	2	3 (1) −1	1



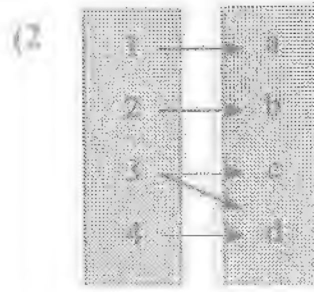
مثال 7/ اكمل الجدول واممثله في المستوي الاحداثي

الزوج المرتب	الصورة (المخرجة)	(x + 2)	العنصر (المدخلة)
(1 , 3)	3	1 + 2	1
(2, 4)	4	2 + 2	2
(3, 5)	5	3 + 2	3
(4, 6)	6	4 + 2	4



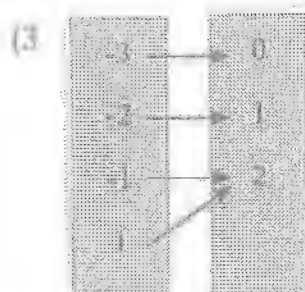
تأكد من فهمك: حدد فيما اذا كانت العلاقة دالة ام لا؟ ذاكراً السبب.

1)



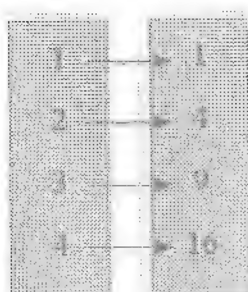
ليست دالة لأن 3 لها مخرجان

2)



دالة لكل مدخلة مخرجة واحدة فقط

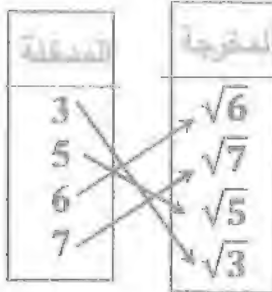
3)



دالة لكل مدخلة مخرجة واحدة فقط



اذا كانت مجموعة المدخلات هي {7 , 6 , 5 , 3} ومجموعة المخرجات {$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{6}$} حدد فيما اذا كانت العلاقات التالية دالة ام لا؟ مع ذكر السبب.



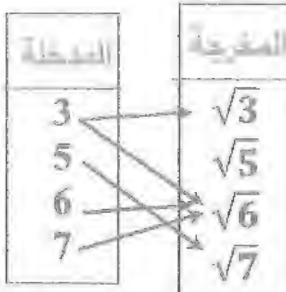
4) مدخلة 3 مخرجتها $\sqrt{3}$

مدخلة 5 مخرجتها $\sqrt{5}$

مدخلة 6 مخرجتها $\sqrt{6}$

مدخلة 7 مخرجتها $\sqrt{7}$

لذلك العلاقة هي دالة لان لكل عنصر (مدخلة) توجد صورة (مخرجة) واحدة لها ،وهذه هي شروط الدالة

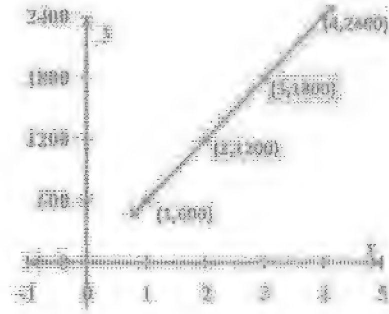


5) {$(3, \sqrt{3}), (5, \sqrt{7}), (3, \sqrt{6}), (6, \sqrt{6}), (7, \sqrt{6})$}

ليست دالة لأن المدخلة 3 لها مخرجتان $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ وهذا لا يطابق شروط الدالة.

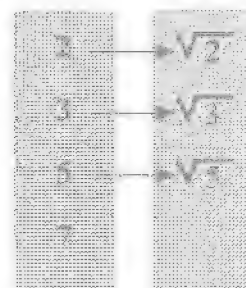
6) يأكل الخفاش 600 بعوضة بالساعة، كم عدد البعوض التي اكلها الخفاش في (2 , 3 , 4) ساعة؟ انشأ جدولاً للدالة يبين العلاقة بين عدد الساعات وعدد البعوض التي يأكلها الخفاش ثم مثل الجدول في المستوي الاحداثي.

العنصر x	قاعدة الدالة 600x	صورة المخرجة y	الزوج المرتب
1	600 (1)	600	(1, 600)
2	600 (2)	1200	(2, 1200)
3	600 (3)	1800	(3 , 1800)
4	600 (4)	2400	(4 , 2400)



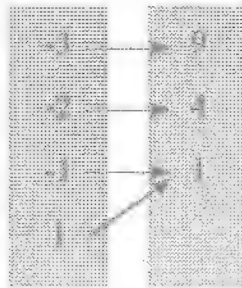
تدرب وحل التمرينات / حدد فيما اذا كانت العلاقة دالة ام لا؟ ذاكراً السبب.

7)



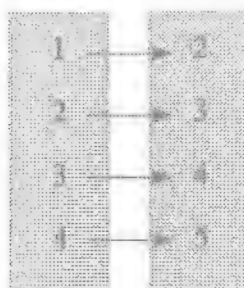
لا تمثل دالة لأن المدخلة 7 ليس لها صورة مخرجة

8)



تمثل دالة لأن كل عنصر مدخلة لها صورة مخرجة

9)

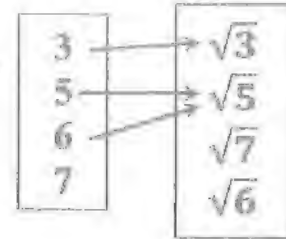


تمثل دالة لأن كل عنصر مدخلة لها صورة مخرجة

اذا كانت مجموعة المدخلات هي {7 , 6 , 5 , 3} ومجموعة المخرجات هي $\{\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{6}\}$

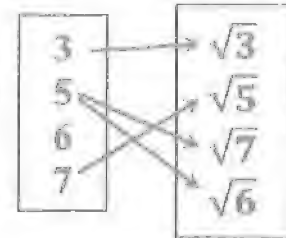
حدد فيما اذا كانت العلاقات التالية دالة ام لا؟ مع ذكر السبب.

10) $\{(3, \sqrt{3}), (5, \sqrt{5}), (6, \sqrt{5})\}$



لا تمثل العلاقة دالة لأن المدخلة 7 ليس لها صورة مخرجة.

11) $\{(3, \sqrt{3}), (5, \sqrt{7}), (5, \sqrt{6}), (7, \sqrt{5})\}$



العلاقة لا تمثل دالة لأن العنصر 5 لهُ مخرجتان والعنصر 6 ليس له مخرجة.

12) اكتب الدالة من الجدول الآتي:

العمر	x	10	20	30	40
الكمية المستهلكة	y	15	25	35	45

$y = x + 5$

الدالة {(10,15) , (20,25) ,(30,35) , (40,45)}

x	y
10 →	15
20 →	25
30 →	35
40 →	45

تدرب وحل مسائل حياتية /

13) رياضة: محمود سبّاح ماهر يقطع 9.5 كم بالساعة، كوّن جدولة دالة تمثل العدد الكلي للكيلومترات التي استطاع قطعها بـ {6 , 4 , 2} ساعة.

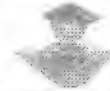
الساعات	المسافة كم
2 →	19
4 →	38
6 →	57

$2 \times 9.5 = 19\ km$

$4 \times 9.5 = 38\ km$

$6 \times 9.5 = 57\ km$

{(2 ,19) , (4 , 38) , (6 ,57)}



14) بكتريا : اذا كانت عدد البكتريا يزداد بمعدل الضعف كل 20 دقيقة كم سيزداد عدد البكتريا خلال ساعتين. كوّن جدول دالة.

نقسم الساعتين الى 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 = 120 دقيقة.

$\{(20 , x) , (40 , 2x) , (60 , 4x) , (80 , 8x) , (100 , 16x) , (120 , 32x)\}$

الدقائق		مضاعفات البكتريا
20	→	x
40	→	2x
60	→	4x
80	→	8x
100	→	16x
120	→	32x

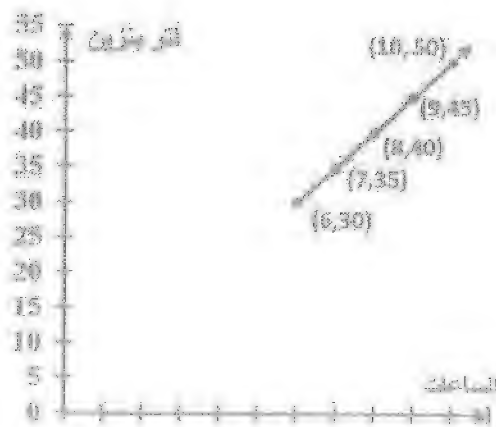
15) وقود : اذا كان استهلاك سيارة اسعاف للبنزين في مستشفى مدينة الطب من البنزين بمعدل 5 لتر لكل 25 كم كوّن قاعدة دالة يبين استهلاك الوقود للسيارة وعدد الكيلومترات التي تقطعها حيث استهلاكها للوقود باللتر {10 , 9 , 8 , 7 , 6} كون جدولاً للدالة ومثلها.

x	قاعدة الدالة	y	النقطة
6	6x = 6 (5)	30	(6 , 30)
7	7x = 7 (5)	35	(7 , 35)
8	8x = 8 (5)	40	(8 , 40)
9	9x = 9 (5)	45	(9 , 45)
10	10x = 10 (5)	50	(10 , 50)

تستهلك كل ساعة لتر 5 = 5 ÷ 25

∴ قاعدة الدالة = 5x

لذلك نعمل جدول يمثل الدالة خلال المدخلات المذكورة.



16) أحياء: كل يد في جسم [illegible] تحتوي على 27 عظمة وعدد عظام المشط اقل من عدد السلاميات بالعدد 9 وعدد عظام الرسغ اكثر من عظام المشط بالعدد 3 علماً ان عدد السلاميات 14. مثل المعلومات اعلاه بجدول الدالة

عدد عظام السلاميات = 14   لذلك للتحقق 14 + 5 + 8 = 27

عدد عظام المشط = 14 – 9 = 5

عدد عظام الرسغ = 5 + 3 = 8

العدد		عظام
14	←	السلاميات
5	←	المشط
8	←	الرسغ

مكّن

17) تحدٍ: جد مجموعة عناصر الدالة $y = 2x - 1$ التي صور عناصرها المجموعة {41 , 49 , 57}

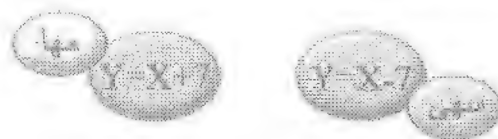
$$2x - 1 = 41 \rightarrow 2x = 41 + 1 \rightarrow 2x = 42 \rightarrow x = \frac{42}{2} = 21$$

$$2x - 1 = 49 \rightarrow 2x = 49 + 1 \rightarrow 2x = 50 \rightarrow x = \frac{50}{2} = 25$$

$$2x - 1 = 57 \rightarrow 2x = 57 + 1 \rightarrow 2x = 58 \rightarrow x = \frac{58}{2} = 29$$

∴ عناصر مجموعة الدالة هي {29 , 25 , 21}.

18) اصحح الخطأ: سهى ومها وجدوا قاعدة دالة أحد عناصرها أقل من الصورة بمقدار 7؟ أيهما أصح؟



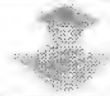
$y = x - 7 \rightarrow x = y + 7$ اكثر من الصورة بمقدار 7

$y = x + 7 \rightarrow x = y - 7$ اقل من الصورة بمقدار 7

لذلك جواب مها هو الصحيح.

19) حس عددي: دالة قاعدتها $42x - 8$ حدد صورة العنصر 2 في الدالة:

صورة العنصر 76 $42x - 8 = 42\,(2) - 8 = 84 - 8 = 76$



أكتب : مسألة حياتية تمثل دالة ثم أنشيء جدول دالة ومثل الجدول في المستوي الاحداثي.

المسألة: أجرة عامل في أحد المصانع 25 الف دينار فأذا كان عدد العمال {2 , 4 , 6 , 8 , 10} كوّن جدول دالة ومثل الجدول في المستوي الاحداثي.

جدول الدالة {(2,50) , (4 , 100) , (6,150) , (8 , 200) , (10 , 250)}

عدد العمال	الاجرة بالالف
2	50
4	100
6	150
8	200
10	250

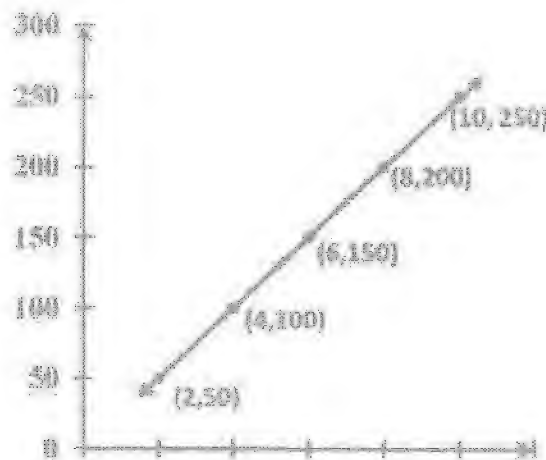
$2 \times 25 = 50$

$4 \times 25 = 100$

$6 \times 25 = 150$

$8 \times 25 = 200$

$10 \times 25 = 250$



الدرس الثالث / الدوال الخطية Linear functions

فكرة الدرس: كتابة معلومة تمثل دالة خطية من جدول الدالة.

المفردات: الدالة الخطية – معادلة المستقيم – المخطط البياني – الارباع الاربعة.

تعلم : اليك المثال التالي لتوضيح فكرة الدرس.

اذا كان لدى سعيد منحل لانتاج العسل ولاحظ ان النحلة تطير بسرعة 24 كم في الساعة. ما العلاقة التي تربط الزمن (عدد الساعات) والمسافة التي تقطعها بالكيلومترات؟

- العلاقة تمثيل الدالة الخطية (معادلة المستقيم في المستوي الاحداثي).

المعادلة الخطية : دالة تكون كل النقاط التي تنتج منها على مستقيم واحد غير عمودي يسمى هذا المستقيم بيان الدالة الخطية.

معادلة المستقيم: هي معادلة تعبّر عن الدالة الخطية بالصورة $y = mx + t$ حيث m , t اعداد ثابتة.

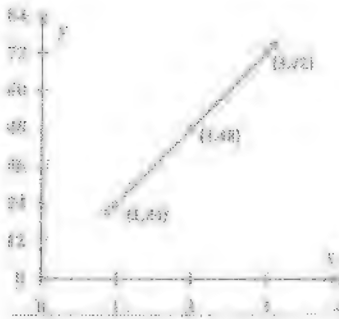
مثال 1/ ما المسافة التي تقطعها النحلة بالكيلومتر على الزمن بالساعات؟

خطوة (1) : انشاء الدالة

نفرض زمن (عدد الساعات) طيران النحلة بالعنصر : x والمسافة المقطوعة y تمثل بالدالة $y = 24x$.

خطوة (2) انشئ جدول الدالة.

خطوة (3) مثل الدالة في المستوي الاحداثي ولكي نرسم دالة خطية بيانية يكفي تعيين موقع نقطتين بيانياً من الدالة.



صل بين النقاط نلاحظ ان عندما تطير النحلة ساعتين تكون المسافة 48 كم وعندما تطير 3 ساعات تكون المسافة المقطوعة 72 كم والمعادلة الناتجة تمثل مستقيماً.

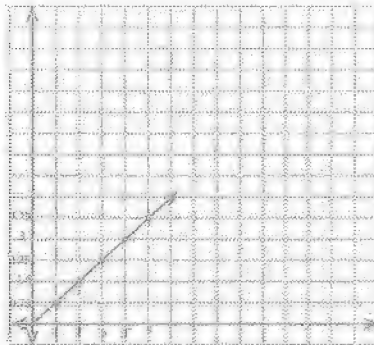
الزوج المرتب	الصورة المخرجة	قاعدة الدالة	العنصر المدخلة
(x , y)	y	y = 24 x	x
(1 , 24)	24	24 (1)	1
(2 , 48)	48	24 (2)	2
(3 , 72)	72	24 (3)	3

مثال 2/ الدالة الخطية $y = 3x - 2$ في المستوي الاحداثي.

الخطوة الاولى : نختار ثلاثة قيم الى x وتعوض بالدالة لنجد y فنحصل على نقاط (x , y) ونكون جدول الدالة الخطية.

الخطوة الثانية: أمثل الدالة في المستوي الاحداثي. (نعين النقاط على المستوي الاحداثي ونصل بينها بخط مستقيم)

الزوج المرتب	الصورة المخرجة	قاعدة الدالة	العنصر المدخلة
(x , y)	y	y = 3x – 2	x
(-1 , -5)	-5	y = 3 (-1) – 2	-1
(0 , -2)	-2	y = 3 (0) – 2	0
(1 , 1)	1	y = 3 (1) – 2	1



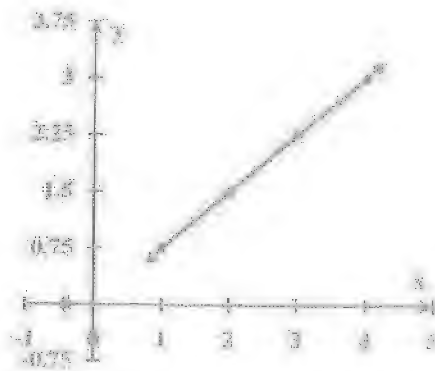
- كتابة الدالة الخطية (معادلة المستقيم) من المخطط البياني للدالة.

مثال 3/ في العام 2011 نجح مختبر علوم المريخ وكالة ناسا الفضائية في الهبوط بمختبر علمي متجول بحجم سيارة على سطح المريخ وبسرعة 0.75m م في الثانية الواحدة، الرسم البياني يوضح دالة تبين المسافة التي هبط بها المتجول على الزمن المستغرق، انشيء جدول دالة خطية ثم اكتب المعادلة الخطية التي تمثلها.



من خلال الرسم البياني نستطيع إنشاء جدول دالة حيث نفرض ان الزمن بـ x والمسافة بـ y يتكون جدول الدالة الخطية.

الصورة (المخرجة)	العنصر (المدخلة)
y	x
0.75	1
1.5	2
2,25	3
3.00	4

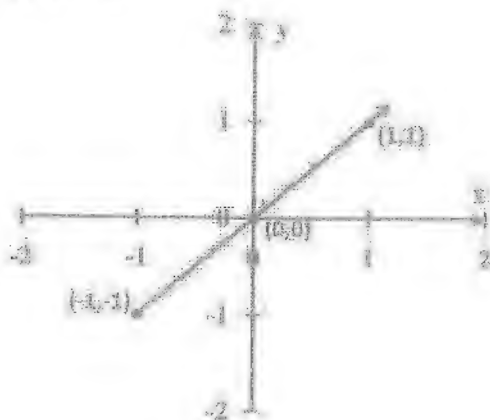


من خلال الجدول نستنتج ان الدالة هي: $y = 0.75x$

تأكد من فهمك: مثل الدوال الخطية التالية في المستوى الاحداثي:

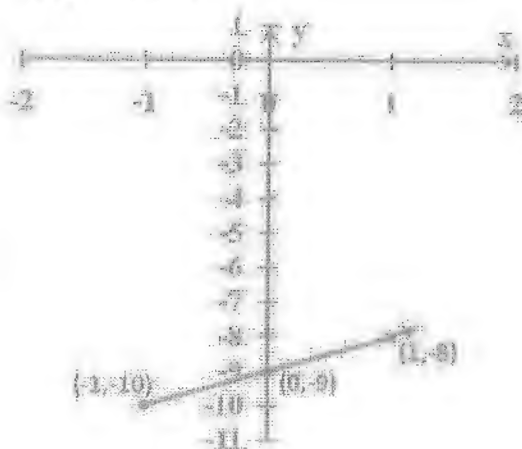
1) $y = x$

النقطة	الصورة المخرجة	قاعدة الدالة	العنصر المدخلة
(x , y)	y	y = x	x
(-1 , -1)	-1	y = -1	-1
(0 , 0)	0	y = 0	0
(1 , 1)	1	y = 1	1

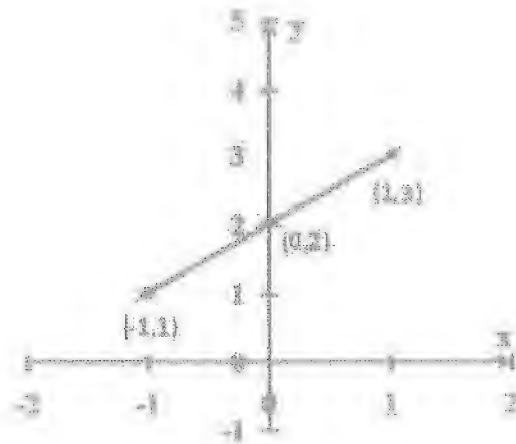


2) $y = x - 9$

النقطة	الصورة المخرجة	قاعدة الدالة	العنصر المدخلة
(x , y)	y	y = x – 9	x
(-1 , -10)	-10	y = -1 – 9	-1
(0 , -9)	-9	y = 0 – 9	0
(1 , -8)	-8	y = 1 – 9	1

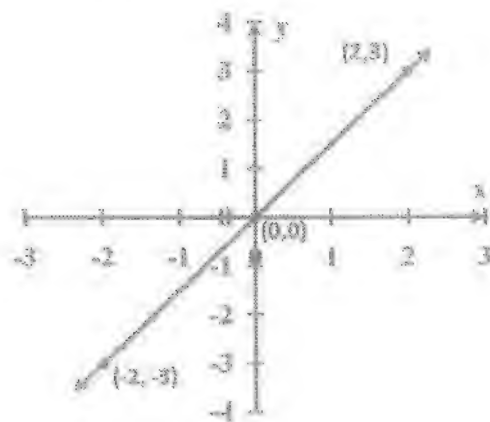


3) $y = x + 2$



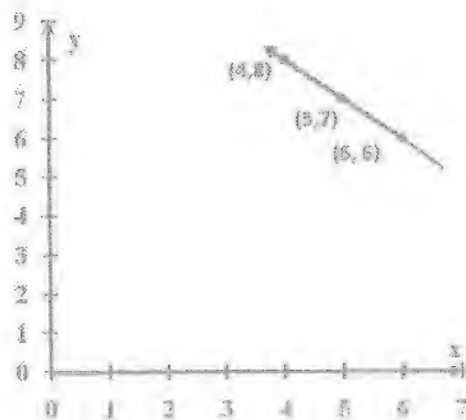
المدخلة	قاعدة الدالة	المخرجة	النقطة
x	y = x + 2	y	(x , y)
-1	y = -1 + 2	1	(-1 , 1)
0	y = 0 + 2	2	(0 , 2)
1	y = 1 + 2	3	(1 , 3)

4) $y = \frac{3}{2}x$



المدخلة	قاعدة الدالة	المخرجة	النقطة
x	$y = \frac{3}{2}x$	y	(x , y)
2	$y = \frac{3}{2}(2)$	3	(2 , 3)
0	$y = \frac{3}{2}(0)$	0	(0 , 0)
-2	$y = \frac{3}{2}(-2)$	-3	(-2 , -3)

5) $y = 12 - x$

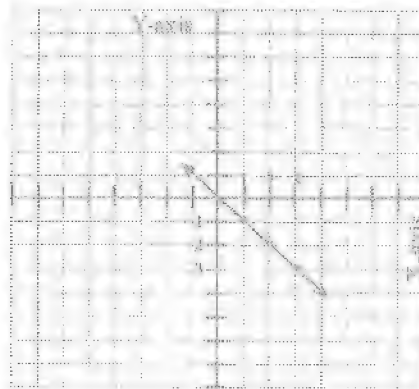


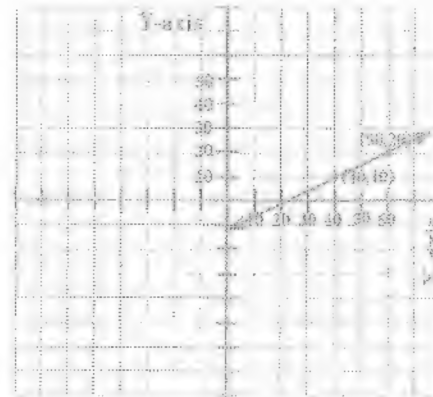
المدخلة	قاعدة الدالة	المخرجة	النقطة
x	y = 12 – x	y	(x , y)
4	y = 12 – 4	8	(4 , 8)
5	y = 12 – 5	7	(5 , 7)
6	y = 12 – 6	6	(6 , 6)



استعمل المخطط البياني في أدناه لإنشاء جدول الدالة وكتابة الدالة الخطية:

6)





المدخلة x	المخرجة y	النقطة (x , y)
40	10	(40 , 10)
50	20	(50 , 20)

جدول الدالة

قاعدة الدالة $y = x - 30$

المدخلة x	المخرجة y	النقطة (x , y)
1	-1	(1 , -1)
2	-2	(2 , -2)
3	-3	(3 , -3)

جدول الدالة

قاعدة الدالة $y = - x$

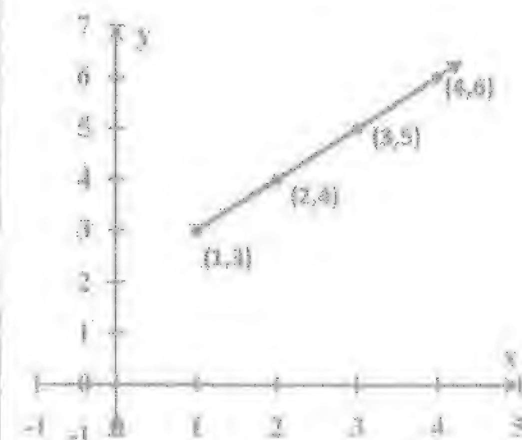
مثل جدول الدوال الخطية التالية بالمستوى الاحداثي:

9)

x	2	1	3	4
y	4	3	5	6

الأزواج المرتبة هي:

(2,4) , (1,3) , (3,5) , (4,6)

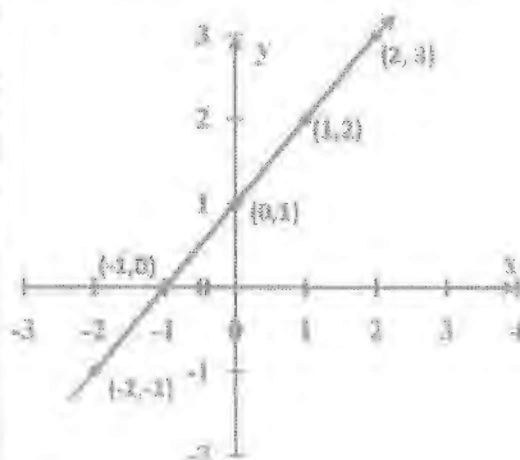


8)

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	0	1	2	3

الازواج المرتبة هي:

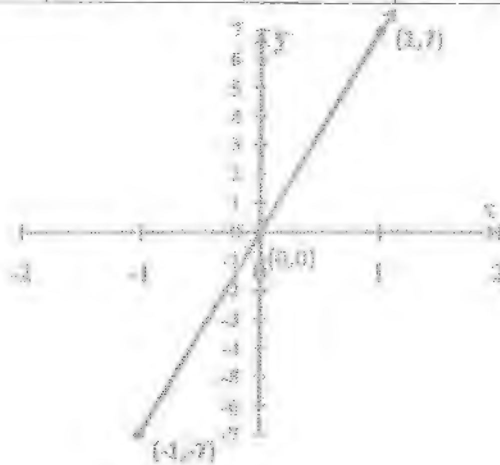
(-2 ,-1) , (-1 ,0) , (0,1) , (1 ,2) , (2 ,3)



تدرب وحل التمرينات/ مثل الدوال الخطية التالية في المستوى الاحداثي:

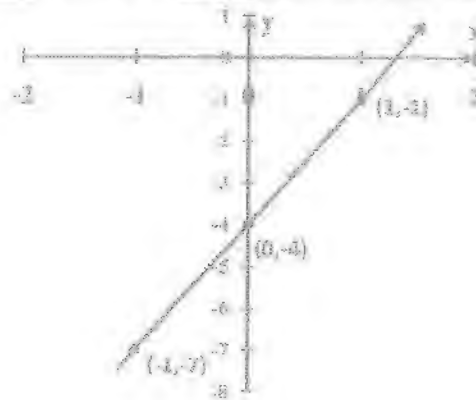
10) $y = 7x$

x	y = 7x	y	(x , y)
-1	y = 7 (-1)	-7	(-1 , -7)
0	y = 7 (0)	0	(0 , 0)
1	y = 7 (1)	7	(1 , 7)



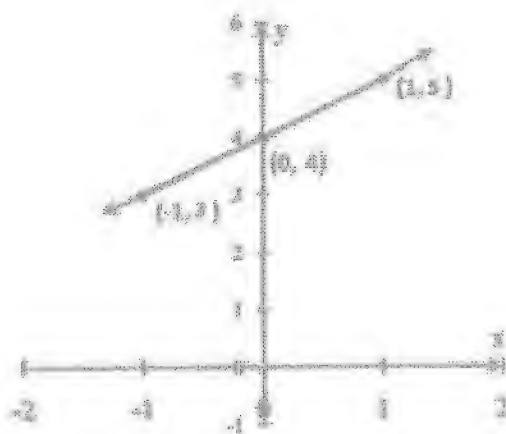
11) $y = 3x - 4$

x	y = 3x – 4	y	(x , y)
-1	y = 3(-1) – 4	-7	(-1 , -7)
0	y = 3 (0) – 4	-4	(0 , -4)
1	y = 3 (1) – 4	-1	(1 , -1)



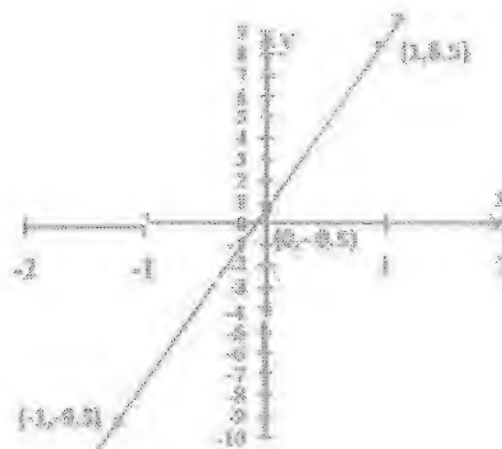
12) $y = x + 4$

x	y = x + 4	y	(x , y)
-1	y = -1 + 4	3	(-1 , 3)
0	y = 0 + 4	4	(0 , 4)
1	y = 1 + 4	5	(1 , 5)



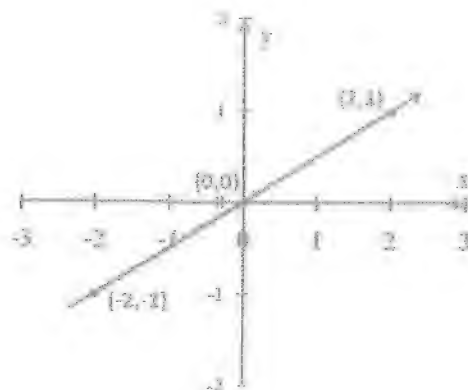
13) $y = 9x - 0.5$

x	y = 9x – 0.5	y	(x , y)
-1	y = 9(-1) – 0.5	-9.5	(-1 , -9.5)
0	y = 9(0) – 0.5	0.5	(0 , 0.5)
1	y = 9(1) – 0.5	8.5	(1 , 8.5)



14) $y = \frac{x}{2}$

x	$y = \frac{x}{2}$	y	(x , y)
2	$y = \frac{2}{2}$	1	(2 , 1)
0	$y = \frac{0}{2}$	0	(0 , 0)
-2	$y = -\frac{2}{2}$	-1	(-2 , -1)

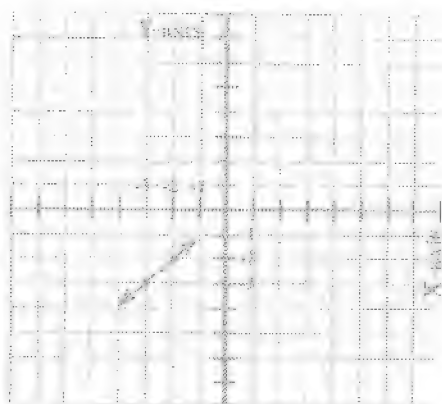


استعمل المخطط البياني في أدناه لإنشاء جدول الدالة وكتابة الدالة الخطية:

15)

x	y	(x , y)
-2	-2	(-2 , -2)
-3	-3	(-3 , -3)

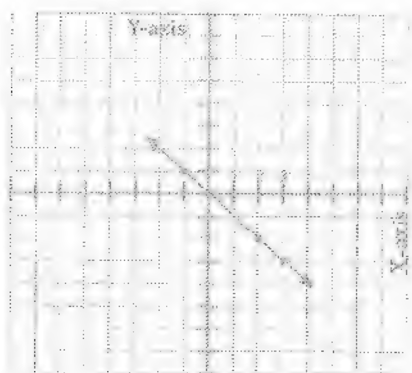
قاعدة الدالة $y = x$



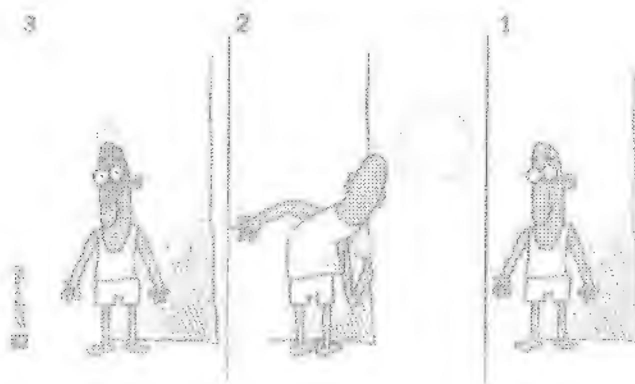
(16

x	y	(x , y)
3	-3	(3 , -3)
2	-2	(2 , -2)
-1	1	(-1 , 1)

قاعدة الدالة $y = -x$



أحدث طرق التان



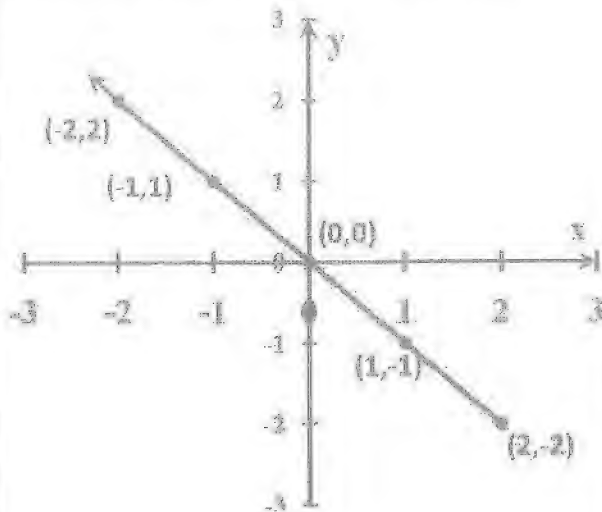
مثل جدول الدوال الخطية الآتية بالمستوى الاحداثي:

17)

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	-1	-2

الازواج المرتبة هي:

(-2,2) , (-1,1) , (0,0) , (1,-1) , (2,-2)

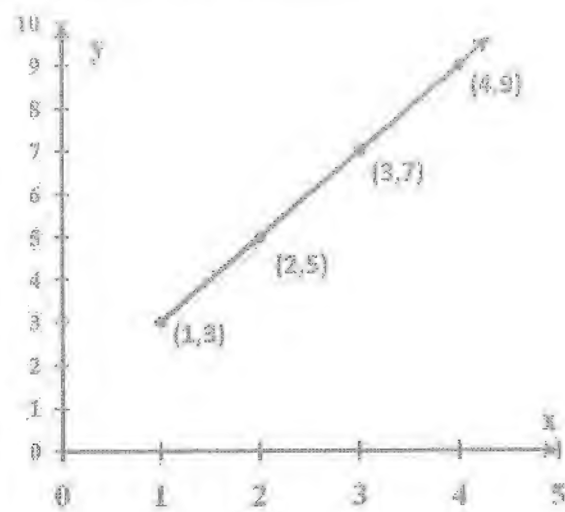


18)

x	2	1	3	4
y	5	3	7	9

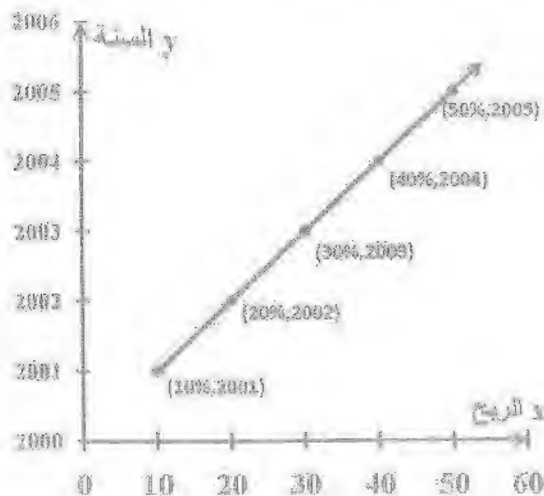
الازواج المرتبة هي:

(2,5) , (1,3) , (3,7) , (4,9)



تدرب وحل مسائل حياتية:

19) احصاء: اراد صاحب شركة لصناعة الصابون ان يجري احصائية للأرباح التي حصلت عليها الشركة خلال 5 سنين اذ وصلت الارباح الى 50% ، أكتب جدول الدالة الخطية من المخطط البياني ثم اكتب المعادلة الخطية العامة للأرباح بالنسبة الى عدد السنوات؟



الربح x	السنة y	النقطة (x , y)
10%	2001	(10% , 2001)
20%	2002	(20% , 2002)
30%	2003	(30% , 2003)
40%	2004	(40% , 2004)
50%	2005	50% , 2005)

قاعدة الدالة $y = 10x + 2000$

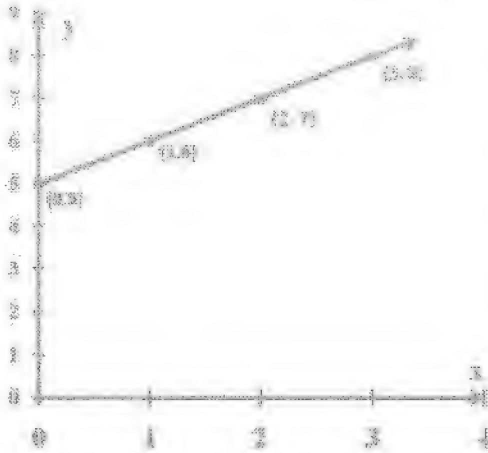


21) رياضة : سجلت بشرى عدد من النقاط في نهاية لعبة كرة السلة بحيث كان عدد النقاط التي سجلتها بشرى في اللعبة السابقة اقل بـ 5 نقاط من اللعبة الحالية انشيء جدول دالة خطية ثم مثل الدالة الخطية في المستوي الاحداثي ثم اكتب المعادلة الخطية العامة للدالة.

افرض ان عدد النقاط التي سجلتها في اللعبة السابقة = x

فأن عدد النقاط التي سجلتها في اللعبة الحالية = $y = x + 5$ وهي قاعدة الدالة او المعادلة الخطية للدالة.

النقطة	المخرجة	قاعدة الدالة	المدخلة
(x , y)	y	y = x + 5	x
(0 , 5)	5	y = 0 + 5	0
(1 , 6)	6	y = 1 + 5	1
(2 , 7)	7	y = 2 + 5	2
(3 , 8)	8	y = 3 + 5	3



21) نقود : لشراء سيارة بـ 12 مليون دينار فاذا كان مع هشام 4 ملايين دينار ولديه خطة لتوفير 2 مليون دينار سنوياً؟ أكتب دالة المبلغ الذي يوفره سنوياً. ارسم الدالة الخطية لتحديد عدد السنوات اللازمة ليوفر هشام المبلغ الكافي لشراء السيارة بعد تحديد جدول دالة خطية مثل المعلومات اعلاه بجدول الدالة.

مبلغ السيارة 4 ملايين دينار + 2 مليون مايوفره في السنة

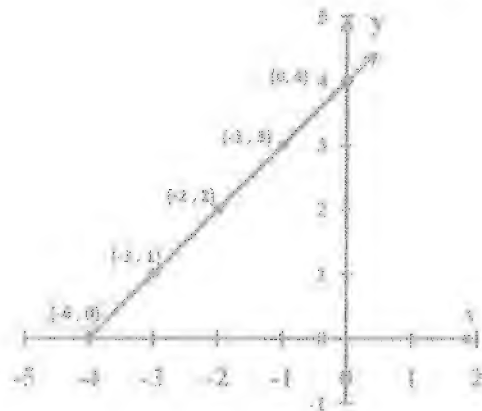
قاعدة الدالة $y = 2x + 4$

اذن عدد السنوات اللازمة ليوفر هشام المبلغ الكافي لشراء السيارة هو 4 سنوات

النقطة	المخرجة	قاعدة الدالة	المدخلة
(x , y)	y	y = 2x+4	x
(1 , 6)	6	y = 2 (1)+4	1
(2 , 8)	8	y = 2 (2)+4	2
(3 , 10)	10	y = 2 (3)+4	3
(4 , 12)	12	y = 2 (4)+4	4

مثل:

22) تحدّ: عين نقاط في المستوي الاحداثي تحقق الدالة الخطية الموضحة بالمخطط البياني المجاور، ثم اكتب قاعدة الدالة النقاط هي:
(-4,0) , (-3,1) , (-2,2) , (-1,3) , (0,4)



قاعدة الدالة $y = x + 4$

23) حس عددي: عدد طبيعي ضرب بـ 3 ثم طرح منه 5 بعد الضرب فكان الناتج الكلي مساوياً للعدد 70. ما المعادلة الخطية العامة للناتج الكلي بالنسبة للعدد الطبيعي؟

$y = 3x - 5$

$3x - 5 = 70$

$3x = 70 + 5$

$3x = 75 \rightarrow x = \frac{75}{3} = 25$

اكتب : مسألة حياتية تطابق الدالة الخطية العامة (معادلة مستقيم) $y = 5x - 3$

عدد طبيعي ضرب بـ 5 ثم طرح منة 3 بعد الضرب

مخزن لبيع صناديق ماء في كل يوم خمس ساعات وفق الدالة $y = 5x - 3$ فكم يبيع في كل ساعة. خلال اليوم كوّن جدول الدالة وفق المعادلة الخطية.

$y = 5(1) - 3 = 2$

$y = 5(2) - 3 = 7$

$y = 5(3) - 3 = 12$

$y = 5(4) - 3 = 17$

$y = 5(5) - 3 = 22$

x	y	(x , y)
1	2	(1 , 2)
2	7	(2 , 7)
3	12	(3 , 12)
4	17	(4 , 17)
5	22	(5 , 22)

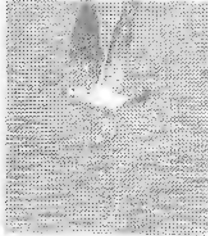


الدرس الرابع / الانعكاس والدوران في المستوي الاحداثي:

Refelction and Rotting in the coordinate plane

فكرة الدرس: تمثيل الانعكاس والدوران في المستوي الاحداثي.

المفردات : التحويل الهندسي والانعكاس والدوران وخط الانعكاس والمستوي الاحداثي واليك المثال التالي لتوضيح فكرة الدرس.



تعلم: يظهر في الصورة (ص50) شكل طائر تنعكس صورتهُ في الماء ، فأذا حددت سحر ثلاث نقاط في الصورة الاصلية للطائر A , B , C فنجد النقاط التي يظهر ترتيبها في الماء C', B', A'.

- الانعكاس في المستوي الاحداثي : Reflection in the coordinate plane

التحويل الهندسي: وهو احد فروع الهندسة الذي يدرس تعاريف الاشكال الهندسية الذي يحوّل كل نقطة في المستوي الاحداثي الى نقطة اخرى في المستوي نفسهُ اي كل نقطة من الشكل الهندسي لها صورة في الانعكاس حول محور معين في المستوي نفسه. او الدوران حول نقطة معينة أو الانسحاب.

الانعكاس: هو تحويل هندسي من شكل (ما) الى صورة مرآتهُ (المعكوسة) (حيث يحافظ الانعكاس على بنية الشكل).

مثال 1/ أ- جد انعكاس النقاط A , B , C التي حددتها سحر.

الخطوة الاولى : نحدد الازواج المرتبة التي تمثل النقاط A , B , C فتكون:

A (2 , 2) , B (3 , 3) , C (4 , 2)

الخطوة الثانية: نحدد خط الانعكاس وليكن x – axis الاحداثي السيني ثم نحدد عدد الوحدات بين كل رأس وخط الانعكاس.

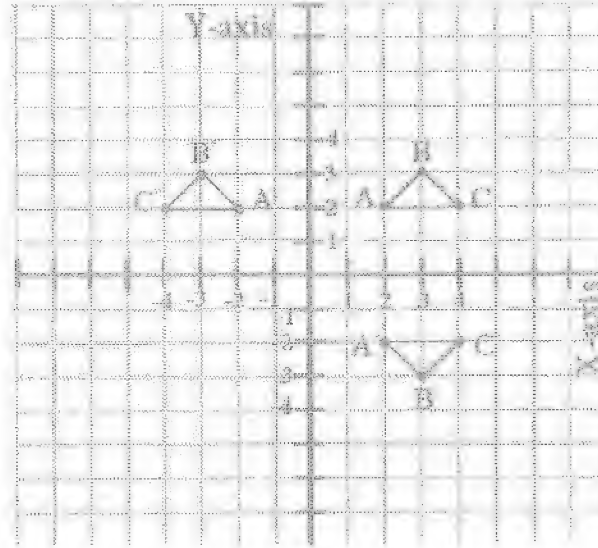
الخطوة الثالثة : نعين نقطة لكل رأس في الجهة الاخرى من خط الانعكاس بالبعد نفسه فيصبح $A'(2,-2)$, $B'(3,-3), C'(4,-2)$ وبصورة عامة انعكاس اي نقطة عندما يكون خط الانعكاس محور السينات هو: $R_x[(x,y)]=(x,-y)$

ب- جد انعكاس النقاط A(2,2) , B(3,3) , C(4,2) على محور y – axis محور الصادات النقاط بعد الانعكاس هي $A''(-2,2), B''(-3,2), C''(-4,2)$

وبصورة عامة انعكاس اي نقطة عندما يكون خط الانعكاس محور الصادات هو:

$$R_y[(x,y)]=(-x,y)$$

اي عندما يكون انعكاس النقطة (x , y) في المحور السيني يتغير اشارة y أي تصبح النقطة (x , -y) اما الانعكاس في محور الصادات فيتغير اشارة x فتصبح النقطة (-x, y). ويوجد انعكاس آخر في نقطة الاصل تتغير اشارة x , y اي تصبح النقطة المنعكسة (-x , -y).



- الدوران في المستوي الاحداثي: Rotting in the corrdinate plane

لدى مراد ساعة مربعة الشكل معلقة على جدار غرفته اراد ان يجري دوراناً للساعة بـ °90 حول نقطة الاصل بأتجاه عقرب الساعة.

ملاحظة: (يكون الدوران مع اتجاه عقارب الساعة او عكس اتجاه عقارب الساعة يذكر بالسؤال)

الدوران: هو تحويل هندسي يحول النقطة (0 , 0) الى نفسها ويحول اي نقطة اخرى مثل A الى النقطة A' حسب قياس الدوران واتجاهها.

مثال 2/ ما صورة دوران النقطة (1 , 2) تحت تأثير الدوران؟

أ- دوران بزاوية قياسها °90 حول نقطة الاصل بأتجاه عقارب الساعة. نطبق القاعدة التالية

$R_{90°}[(x,y)] = (y,-x)$ مثلاً $R_{90°}[(1,2)] = (2,-1)$

اي الدوران °90 مع اتجاه عقارب الساعة نبدل x بدل y ونضع y بدل x مع تغير اشارة x.

ب- دوران بزاوية قياسها °90 حول نقطة الاصل باتجاه عكس عقارب الساعة نطبق القاعدة التالية:

$R_{90°}[(x,y)] = (-y,x)$ مثلاً $R_{90°}[(1,2)] = (-2,1)$

اي الدوران °90 عكس اتجاه عقارب الساعة نبدل x بدل y ونضع y بدل x مع تغير أشارة y.



ج- دوران بزاوية قياسها $180°$ حول نقطة الاصل مع اتجاه عقارب الساعة او عكس اتجاه عقارب الساعة نطبق القاعدة التالية: $R_{180°}[(x,y)] = (-x,-y)$ مثلاً $R_{180°}[(1,2)] = (-1,-2)$

د- دوران بزاوي قياسها $270°$ حول نقطة الاصل بأتجاه عقارب الساعة : نطبق القاعدة التالية: مشابهة (ب)

$R_{270°}[(x,y)] = (-y,x)$ $\qquad R_{270°}[(1,2)] = (-2,1)$

هـ- دوران بزاوية قياسها $270°$ حول نقطة الاصل بأتجاه عكس عقارب الساعة: نطبق القاعدة التالية:

$R_{270°}[(x,y)] = (y,-x)$ مثال $R_{270°}[(1,2)] = (2,-1)$ تشبه (أ)

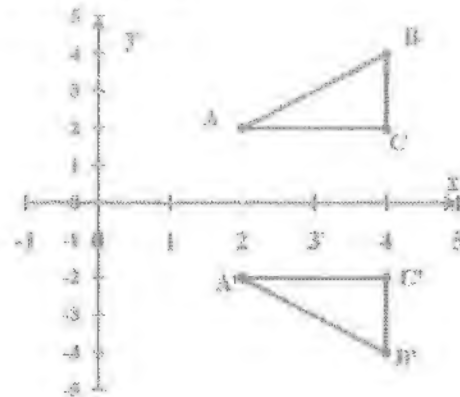
تأكد من فهمك: أنسخ الاشكال في المستوي الاحداثي ثم ارسم صورتهُ في الانعكاس حول خط الانعكاس اذا كانت النقاط:

1) A (2 , 2) , B (4 , 4) , C(4 , 2) خط الانعكاس هو x-axis

$R_x[A(2,2)] = A'(2,-2)$

$R_x[B(4,4)] = B'(4,-4)$

$R_x[C(4,2)] = C'(4,-2)$

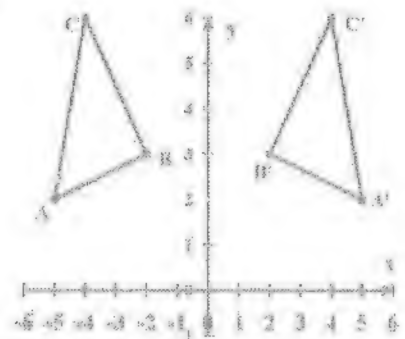


2) A(-5 , 2) , B(-2 , 3) , C(-4 , 6) خط الانعكاس هو y-axis

$R_y[A(-5,2)] = A'(5,2)$

$R_y[B(-2,3)] = B'(2,3)$

$R_y[C(-4,6)] = C'(4,6)$



3) A(1 , 1) , B(2 , 3) , C(5 , 3) , D(3 ,1)

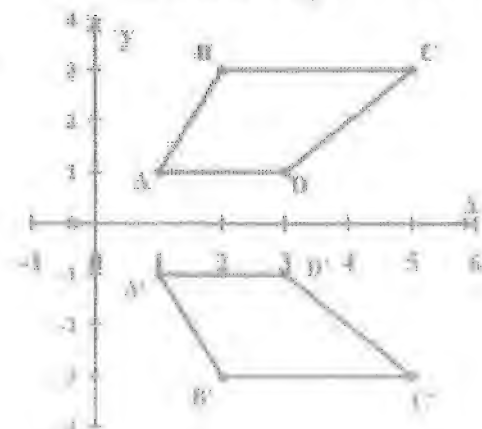
خط الانعكاس هو x-axis

$R_x[A(1,1)] = A'(1,-1)$

$R_x[B(2,3)] = B'(2,-3)$

$R_x[C(5,3)] = C'(5,-3)$

$R_x[C(3,1)] = C'(3,-1)$



اذا كانت النقطة (1- , 2) فجد صورتها.

4) تحت تأثير دوران بزاوية °90 حول نقطة الاصل باتجاه عكس عقرب الساعة.

$$R_{90^\circ}[(x,y)] = (y,-x) \qquad R_{90^\circ}[(2,-1)] = (-1,-2)$$

5) تحت تاثير دوران بزاوية °180 حول نقطة الاصل باتجاه عقرب الساعة

$R_{180^\circ}[(2,-1)] = (-2,1)$ لذلك $R_{180^\circ}[(x,y)] = (-x,-y)$

6) تحت تأثير دوران بزاوية °270 حول نقطة الاصل باتجاه عقرب الساعة.

$R_{270^\circ}[(2,-1)] = (1\,,2)$ لذلك $R_{270^\circ}[(x,y)] = (-y,x)$

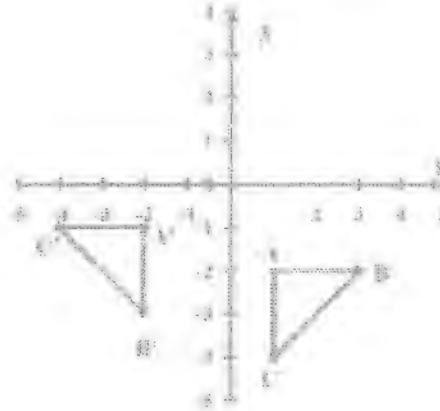
7) اذا كانت A(1,-2) , B(3 ,-2) , C(1,-4) رؤوس مثلث اوجد دوران حول نقطة الاصل وبزاوية °90 باتجاه عقرب الساعة.

$R_{90^\circ}(x,y) = (y,-x)$ لذلك

$R_{90^\circ}[A(1,-2)] = A'(-2,-1)$

$R_{90^\circ}[B(3,-2)] = B'(-2,-3)$

$R_{90^\circ}[C(1,-4)] = C'(-4,-1)$



8) اذا كان المربع (2,2-) , (2,4-) , (4,2-) , (4,4-) فجد صورة المربع تحت تأثير دوران بزاوية °90 باتجاه عقارب الساعة وعكس عقارب الساعة ثم مساحة المربع ومساحة صورته، ماذا تلاحظ؟

°90 عكس اتجاه عقرب الساعة:

$R_{90}(-4,4) = (-4,-4)$

$R_{90}(-4,2) = (-2,-4)$

$R_{90}(-2,2) = (-2,-2)$

$R_{90}(-2,4) = (-4,-2)$

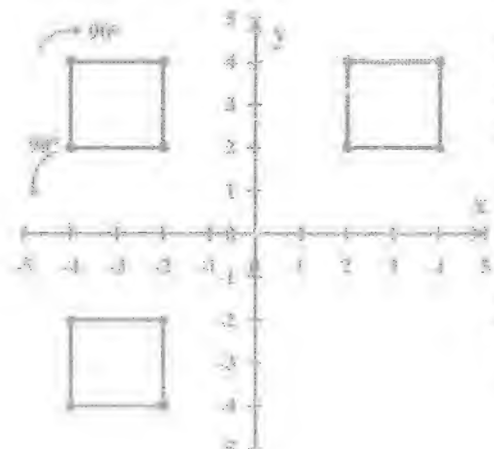
°90 مع اتجاه عقرب الساعة:

$R_{90}(-4,4) = (4,4)$

$R_{90}(-4,2) = (2,4)$

$R_{90}(-2,2) = (2,2)$

$R_{90}(-2,4) = (4,2)$





مساحة المربع الاصلي = 2 × 2 = 4

مساحة المربع بعد الدوران °90 مع اتجاه عقرب الساعة 4 = 2 × 2

نلاحظ ان الدوران هو تحويل هندسي يحافظ على بنية الشكل الهندسي.

كذلك عكس اتجاه عقارب الساعة = 2 × 2 = 4

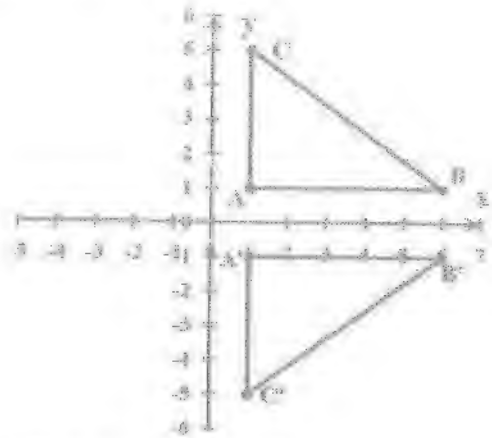
تدريب وحل التمرينات: انسخ الاشكال في المستوي الاحداثي ثم ارسم صورته في الانعكاس حول خط الانعكاس اذا كانت النقاط

9) A(1,1) , B (6,1) , C(1,5)   خط الانعكاس هو x-axis

$R_x[A(1,1)] = A'(1,-1)$

$R_x[B(6,1)] = B'(6,-1)$

$R_x[C(1,5)] = C'(1,-5)$

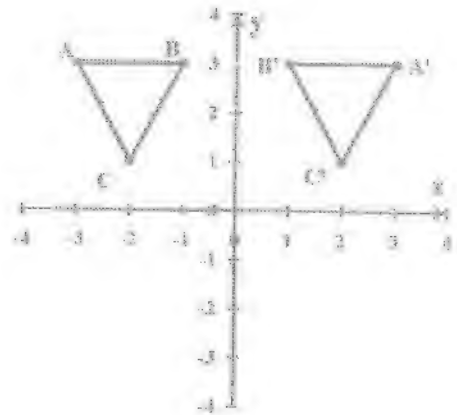


10) A(-3 ,3) , B(-1, 3) , C(-2,1)   خط الانعكاس هو y-axis

$R_y[A(-3,3)] = A'(3,3)$

$R_y[B(-1,3)] = B'(1,3)$

$R_y[C(-2,1)] = C'(2,1)$



11) A(-3,2) , B(-2,4) , C(-1,4) , D(-1,2)

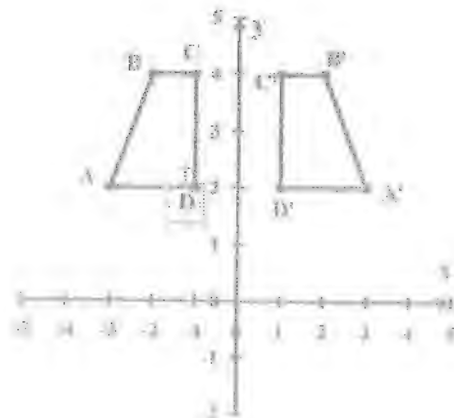
خط الانعكاس هو y-axis

$R_y[A(-3,2)] = A'(3,2)$

$R_y[B(-2,4)] = B'(2,4)$

$R_y[C(-1,4)] = C'(1,4)$

$R_y[D(-1,2)] = D'(1,2)$



اذا كان [illegible] (1- ، 2) فجد صورتها:

12) تحت [illegible] بزاوية 270 حول نقطة الاصل باتجاه عكس [illegible] الساعة.

$$R_{270}(2,-1) = (-1,-2) \text{ لذلك } R_{270}(x,y) = (y,-x)$$

13) تحت تأثير دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الاصل باتجاه عقرب الساعة.

$$.R_{90°}(2,-1) = (-1,-2) \text{ لذلك } R_{90}(x,y) = (y,-x)$$

14) تحت تأثير دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الاصل بأتجاه عكس عقرب الساعة.

$$R_{180}(2,-1) = (-2,1) \text{ لذلك } R_{180°}(x,y) = (-x,-y)$$

15) اذا كان المثلث (3,-1) ، (-1,4) ، (1,3) فجد صورة المثلث تحت تأثير دوران بزاوية $180°$ باتجاه عكس عقارب الساعة ثم باتجاه عقارب الساعة.

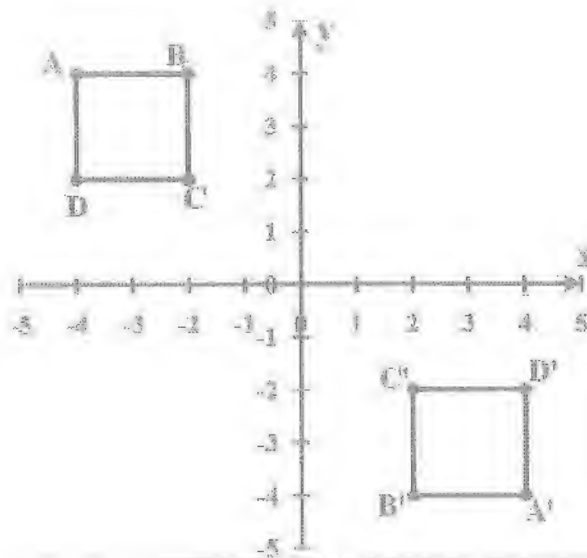
$R_{180}(x,y) = (-x,-y)$

$R_{180}(-4,4) = (4,-4)$

$R_{180}(-4,2) = (4,-2)$

$R_{180}(-2,4) = (2,-4)$

$R_{180}(-2,2) = (2,-2)$



ملاحظة: **الدوران بزاوية $180°$ باي اتجاه له نفس القانون**

تدرب وحل مسائل حياتية:

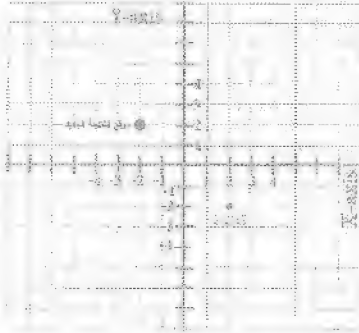
16) وقفة العلم : في يوم الخميس وقف الطلاب الثاني متوسط لتحية العلم فقرر كريم الذي يقف عند النقطة (3 ، 3-) أن يدور بزاوية مقدارها $270°$ حول نقطة الاصل باتجاه عقارب الساعة فما النقطة التي يقف عندها كريم بعد الدوران؟

$R_{270}(x,y) = (-y,x)$

$R_{270}(-3,3) = (-3,-3)$

∴ يقف على النقطة (3- ، 3-).

17) يظهر الرسم المجاور موقعاً لثلاجة في النقطة (-2 ، 2) اراد جميل ان يحركها بزاوية °180 بعكس اتجاه عقرب الساعة، جد النقطة التي ستمثل موقع الثلاجة الجديد.



دوران باتجاه عكس عقارب الساعة °180 $R_{180} = (x, y) = (-x, -y)$

$R_{180} = (2, -2) = (-2, 2)$

18) حدد المحافظة التي تمثل دوران محافظة ميسان بزاوية °90 عكس اتجاه عقارب الساعة مع عقارب الساعة.

$R_{90}(x, y) = (y, -x)$ مع عقارب الساعة

$R_{90}(x, y) = (-y, x)$ عكس عقارب الساعة

المحافظة التي تمثل ميسان بدوران °90 عكس عقارب الساعة هي ذي قار.

المحافظة التي تمثل ميسان بدوران °90 مع اتجاه عقارب الساعة هي واسط

فكر: 19) تحدٍّ: افرض ان النقطة (4 ، 3-) هي صورة للنقطة (4 ، 3) في انعكاس ، حدد اي محور تم الانعكاس؟

بما ان الاحداثي السيني هو الذي تغير فأن الانعكاس تم حول المحور الصادي.

20) حسٌّ عدديٌّ: اي زاوية دوران يكون فيها صورتها نقطة نفسها بأتجاه او عكس اتجاه عقارب الساعة؟

الزاوية هي °180 درجة. $R_{180}(x, y) = (-x, -y)$

21) أصحح الخطأ: يقول مهند ان انعكاس النقطة (2, 3-) حول محور السينات هو النقطة (3 ، 2-) صحح خطأ مهند.

انعكاس النقطة (2 ، 3-) حول محور السينات يتغير الاحداثي الصادي

لذلك جواب مهند خطأ والصحيح $R_x(-3, 2) = (-3, -2)$

أكتب : خطوات ايجاد احداثيات صورة النقطة (3 ، 3-) في الانعكاس حول محور الصادات.

نطبق القاعدة التالية: $R_x(x, y) = (-x, y)$

اي نغير اشارة الاحداثي السيني x – axis $R_y(-3, 3) = (3, 3)$

الدرس الخامس / الانسحاب في المستوى الاحداثي:
Translation in the coordinate plane

فكرة الدرس: الانسحاب في المستوى الاحداثي.

المفردات : الانسحاب والمستوي الاحداثي.

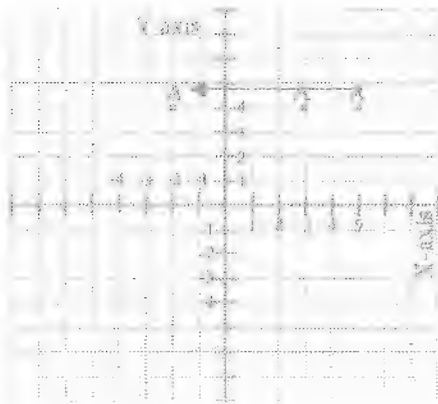
واليك المثال التالي لتوضيح فكرة الدرس.

الانسحاب: هو أنتقال الشكل من موقع الى آخر، دون تدويره ، ولا ينتج عن ذلك تغير في قياسات شكلهِ.

- الانسحاب الى اليمين او الى اليسار **Translation to Right or left**
- الانسحاب الى الاعلى او الى الاسفل **Translation to up or Down**

مثال 1/ جد احداثيات النقطة A(3 ,4) بالانسحاب:

i) وحدتان الى اليمين ii) 5 وحدات الى اليسار



i) تحرك النقطة A(3 , 4) وحدتين نحو اليمين تحصل على , A(3+2
$(4) = A'(5,4)$ (يعني اضافة على x)

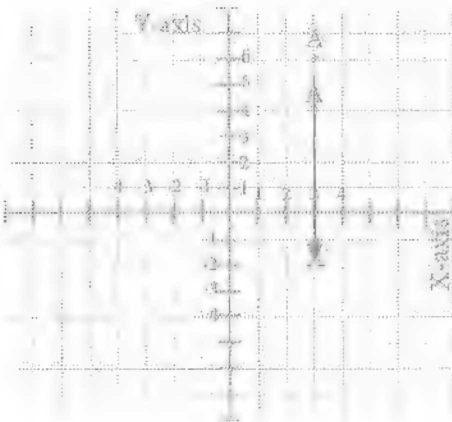
ii) تحرك النقطة A(3,4) خمس وحدات نحو اليسار تحصل على $A(3-5,4) = A''(-2,4)$ (يعني تطرح من x) وبصورة عامة انسحاب بموازاة محور السينات (يمين او يسار)

$T_x(x,y) = (x+a,y)$ الى اليمين تضيف يعني $a > 0$ واذا

لليسار تطرح يعني $a < 0$ $T_x = [(x,y)]$

مثال 2/ جد احداثيات النقطة A(3,4) بالانسحاب:

i) وحدتان الى الاعلى ii) 5 وحدات الى الاسفل



i) تحرك النقطة A(3,4) وحدتان الى الاعلى تحصل على
$A(3,4+2) = a'(3,6)$ (اضافة وحدتين على y)

ii) تحرك النقطة A(3 ,4) خمسة وحدات الى الاسفل تحصل على
$A(3,4-5) = A''(3,-1)$ (طرح 5 وحدات من y)

بصورة عامة : انسحاب (y , x) بموازاة محور الصادات
$T_y(x,y) = (x\ ,y+a)$

اذا كان الانسحاب نحو الاعلى يضاف وحدات موجبة $a > 0$

واذا للاسفل يطرح من y وحدات سالبة $a < 0$.

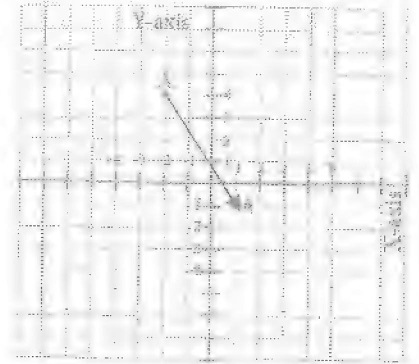


- الانسحاب المائل : Translation Italic

تعلمت الانسسحاب بموازاة المحور السيني أو المحور الصادي. ويوجد انسحاب من شكل آخر هو الانسحاب المائل الذي لا يوازي اي من المحورين. هنا الاضافة او الطرح يكون على x وy.

$T_{xy}(x, y) = (x + a, y + b)$

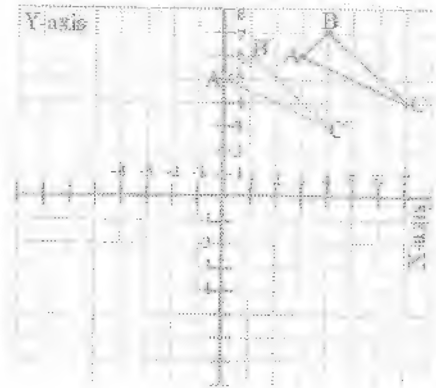
مثال 3/ جد احداثيات النقطة A (-2 , 4) بالانسحاب 3 وحدات الى اليمين و5 وحدات نحو الاسفل.



تحرك النقطة A (-2 , 4) ثلاث وحدات نحو اليمين وخمسة وحدات نحو الاسفل فنحصل على:

$$T_{xy}[A(-2,4)] = A'(-2+3, 4-5) = A'(1,-1)$$

مثال 4/ المثلث ABC مثلث رؤوسه A(3,6) , B(4 , 7) , C(7,4) جد انسحابه 3 وحدات نحو اليسار ، ووحدة نحو الاسفل.

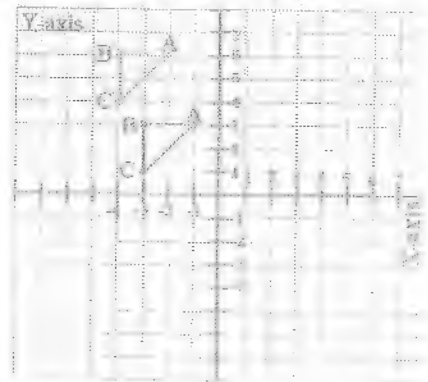


$$T_{xy}[A(3,6)] = A'(3-3, 6-1) = A'(0,5)$$

$$T_{xy}[B(4,7)] = B'(4-3, 7-1) = B'(1,6)$$

$$T_{xy}[C(7,4)] = C'(7-3, 4-1) = C'(4,3)$$

مثال 5/ المثلث ABC مثلث رؤوسه A(-1,3) , B(-3,3) , C(-3,1) جد انسحابه وحدة واحدة نحو اليسار وثلاث وحدات نحو الاعلى.



$$T_{xy}[A(-1,3)] = A'(-1-1, 3+3) = A'(-2,6)$$

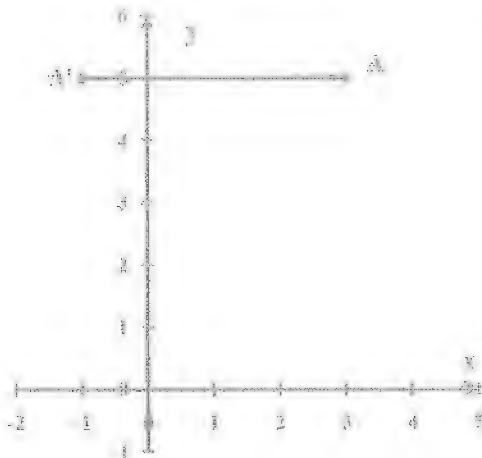
$$T_{xy}[B(-3,3)] = B'(-3-1, 3+3) = B'(-4,6)$$

$$T_{xy}[C(-3,1)] = C'(-3-1, 1+3) = C'(-4,4)$$

تأكد من فهمك/ مثل النقاط التالية وصورها في المستوى الإحداثي.

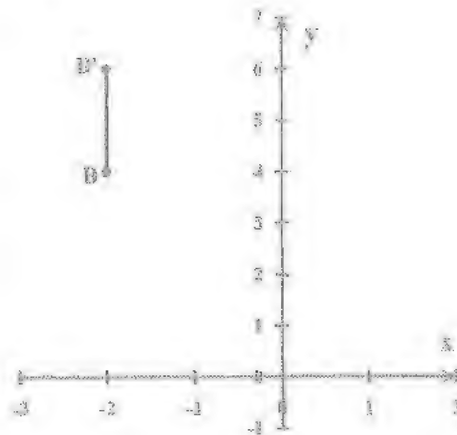
1) بأنسحاب النقطة A(3,5) اربع وحدات نحو اليسار

$$T_x[A(3,5)] = A'(3-4,5) = A'(-1,5)$$



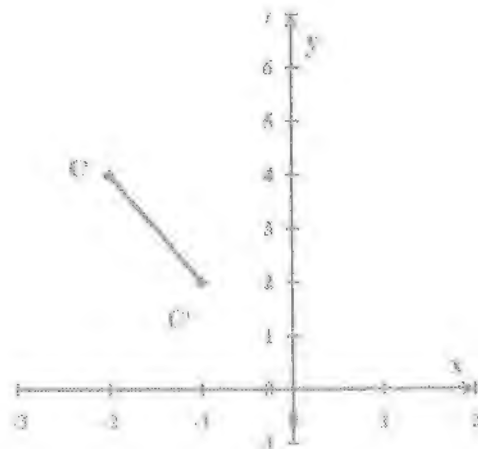
2) بأنسحاب النقطة B(-2,4) وحدتان نحو الاعلى

$$T_y[B(-2,4)] = B'(-2,6)$$



3) بأنسحاب النقطة C(-2,4) وحدة واحدة نحو اليمين ووحدتين نحو الاسفل.

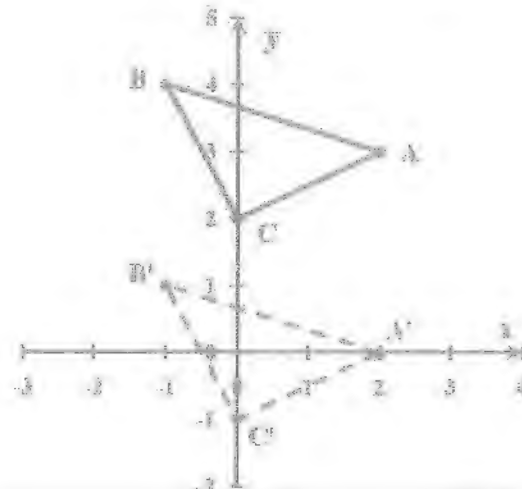
$$T_{xy}[C(-2,4)C'(-2+1,4-2] = C'(-1,2)$$





4) جد انسحاب المثلث ABC اذا A(2,3) , B(-1,4) , C(0,2) بمقدار ثلاثة وحدات نحو الاسفل ثم مثلهُ وصورتهُ في المستوي الاحداثي.

$T_y[A(2,3)] = A'(2,0)$
$T_y[B(-1,4)] = B'(-1,1)$
$T_y[C(0,2)] = C'(0,-1)$



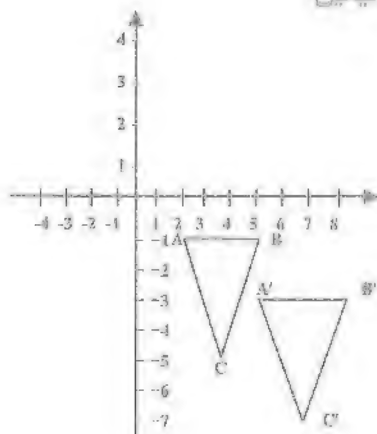
5) انسخ المثلث ABC ثم حدد الازواج المرتبة في المستوي الاحداثي ثم جد انسحابه 3 وحدات نحو اليمين، وحدتان نحو الاسفل.

الخطوة الاولى: انسحاب رؤس المثلث AwBC (3) وحدات نحو اليمين

A(2,-1) → A′(2+3,-1) = A′(5,-1)
B(5,-1) → B′(5+3,-1) = B′(7,-5)
C(4,-5) → C′(4+3,-5) = C′ = (7,-5)

الخطوة الثانية: انسحاب A′B′C′ وحدتان للاسفل

A′(2,-1) → A″(5,-1-2) = A″(5,-3)
B′(8,-1) → B″(8,-1-2) = B″(8,-3)
C′(7,-5) → C″(7,-5-2) = C′ = (7,-7)

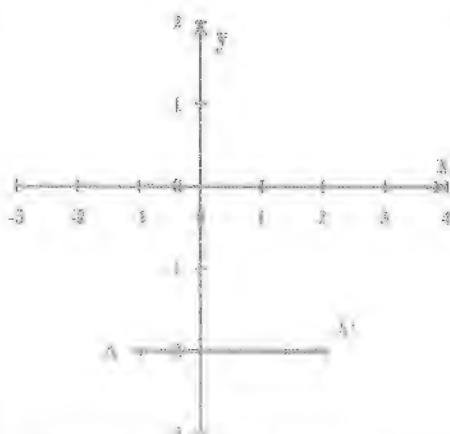


تدرب وحلّ التمرينات / مثل النقاط التالية وصورها في المستوي الاحداثي:

6) بأنسحاب النقطة A(-1,-2) ثلاث وحدات نحو اليمين

$T_x[A(-1,-2)] = A'(-1+3,-2) = A'(2,-2)$

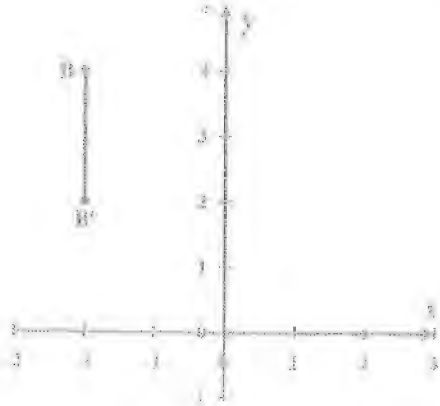
انسحاب يوازي محور السينات.



7) بأنسحاب النقطة B (-2,4) وحدتين نحو الاسفل.

$$T_y[B(-2,4)] = B'(-2,4-2) = B'(-2,2)$$

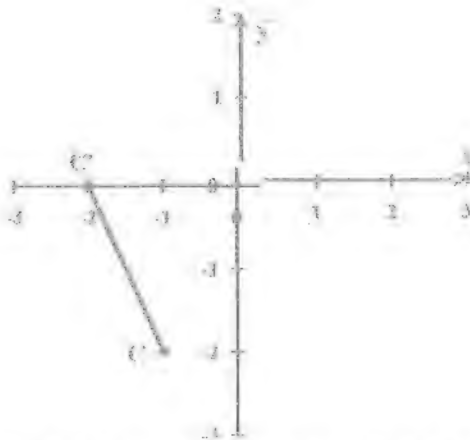
انسحاب يوازي محور الصادات



8) بأنسحاب النقطة C(-1 , -2) وحدة واحدة نحو اليسار ووحدتان نحو الاعلى.

$$T_{xy}[C(-1,-2)] = C'(-1-1,-2+2)$$
$$= C'(-2,0)$$

انسحاب مائل



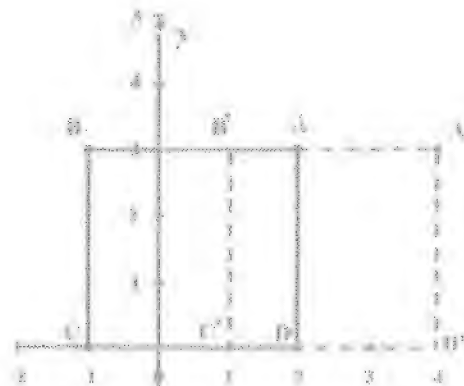
9) جد أنسحاب المربع ABCD اذ A(2,3) , B(-1,3) , C(-1,0) , D(2,0) بمقدار وحدتين نحو اليمين. ثم مثلهُ وصورتهُ في المستوي الاحداثي.

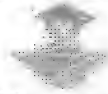
$T_x[A(2,3)] = A'(2+2,3) = A'(4,3)$

$T_x[B(-1,3)] = B'(-1+2,3) = B'(1,3)$

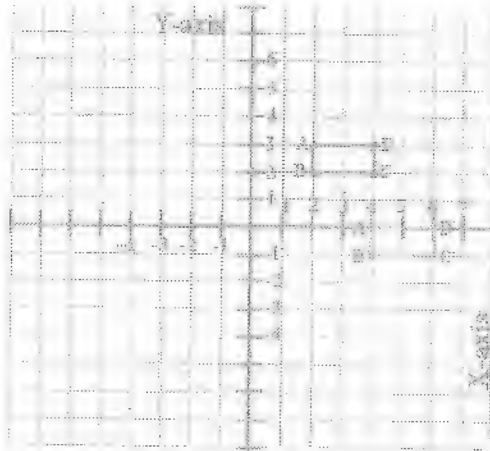
$T_x[C(-1,0)] = C'(-1+2,0) = C'(1,0)$

$T_x[D(2,0)] = D'(2+2,0) = D'(4,0)$





10) انسخ المستطيل ABCD ثم حدد الازواج المرتبة انسحاباً مائلاً بوحدتين الى اليمين وثلاث وحدات الى الاسفل.



الخطوة الاولى : نجد احداثيات اللوحة ولتكن

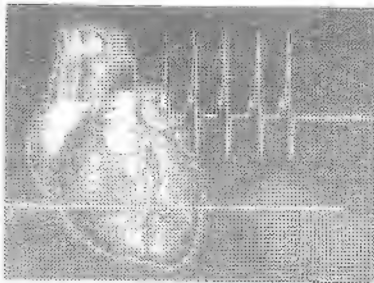
A(2,3) , B(2,2) , C(4,2) , D(4,3) ثم نجريء انسحاباً بـ وحدتين الى اليمين زيادة الى x ونقصان الى y بـ 3 وحدات فتصبح النقاط

$A'(4,0), B(4,-1), C'(6,-1), D(6,0)$

تحقق من النقاط ثم صل بين النقاط لنحصل على لوحة بعد الانسحاب المائل.

تدرب وحل مسائل حياتية:

11) علم الاحياء : تطبيق في علم الاحياء في الشكل ادناه تخطيط لقلب انسان، اين التكرار في المخطط واين تمت عمليات انسحاب المخطط؟ وعدد الانسحابات.

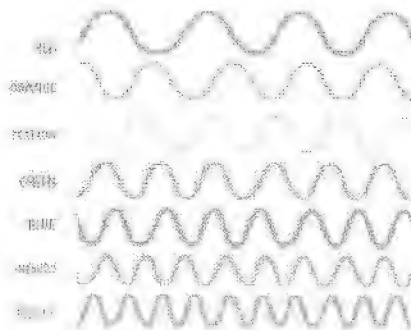


تمت عملية الانسحاب من الربع الثاني الى الربع الاول.

عدد الانسحابات 4 انسحابات

12) موجات الضوء: في الشكل موجات للضوء هل هناك عملية انسحاب للموجة ABC وكم وحدة من اليسار الى اليمين؟

نعم يوجد انسحاب للموجة من اليسار الى اليمين وعددها 3



13) موجات: هناك موجات تحدث في البحر فاذا كانت النقطة (5, -2) على رأس الموجة اجري انسحاباً للموجة فتكونت الصورة (2 , 8) فكم وحدة اجري الانسحاب المائل وما هي جهات الانسحاب؟

على الاحداثي السيني $10 = (-2) - 8$

على الاحداثي الصادي $-3 = 5 - 2$

∴ الانسحاب المائل 10 وحدات لليمين وثلاث وحدات للاسفل على النقطة (5 , -2).

14) رسم : رسمت رغد سلسلة جبلية من اربعة جبال فرسمت الجبل الاول وارادت ان ترسم الجبل الثاني بصورة انسحاب للجبل الاول بوحدتين الى اليمين ووحدة الى الاعلى، فما صورة انسحاب الجبل اذا علمت ان نقاط الجبل الاول A(3,3) , B(3,0) , C(0,0)؟

$T_{xy}[A(3,3)] = A'(3+2, 3+1) = A'(5,4)$

$T_{xy}[B(3,0)] = B'(3+2, 0+1) = B'(5,1)$

$T_{xy}[B(0,0)] = C'(0+2, 0+1) = C'(2,1)$

فكّر:

15) ما احداثيات النقطة (x , y) بالانسحاب m وحدة الى اليمين وn وحدة الى الاعلى.

$T_{xy}(x,y) = (x+m\,, y+n)$

16) استنتاج: أجري انسحاباً فكانت النقطة (6, -4) على شكل ما، ثم أنسحاباً آخر للصورة الناتجة فكانت النقطة (-6 , 4) دون استعمال الرسم؟ ما هي الصورة النهائية بعد اجراء انسحابين؟ فسر اجابتك.

الصورة النهائية للنقطة بعد اجراء انسحابين هي (-6 , 4) حيث تعتبر النقطة (6 , -4) هي صورة النقطة الاولى وتعتبر نقطة جديدة تجد صورتها بانسحاب وقد ظهرت صورتها بالنقطة الاخيرة (-6 , 4).

17) هندسة : عند اجراء انسحاب للمعين ABCD (شكل رباعي) الذي رؤوسه: A(2,1) , B(3,-3) , C(2,-4) , D(1,-3) كان احداثي الرأس A بعد الانسحاب $A'(4,-3)$ صف B', C', D' بعد الانسحاب.

بما أن $A'(4,-3)$ صورة A(2 ,1) بالانسحاب فأن $2 = 2 - 4$ اي وحدتين لليمين

ووحدتين للاسفل $-2 = (-1) - 3-$.

$T_{xy}[B(3,-3)] = B'(3+2, -3-2) = B'(5,-5)$



$T_{xy}[C(2,-4)] = C'(2+2,-4-2) = C'(4,-6)$

$T_{xy}[D(1,-3)] = D'(1+2,-3-2) = D'(3,-5)$

ولنتأكد من A(2,-1) $T_{xy}[A(2,-1)] = A'(2+2,1-2) = A'(4,-3)$

أكتب: مسألة حياتية تستعمل فيها انسحاباً لشكل معين. ثم حل المسألة

سيارة تقف عند النقطة (3 ,1) تحركت بأتجاه اليمين 6 وحدات والى الاسفل 10 وحدات فأين يكون موقع السيارة بعد حركتها.

$T_{xy}[A(1,3)] = A'(1+6,3-10) = B'(7,-7)$

∴ موقع السيارة يكون في النقطة (7- , 7).

الدرس السادس / خطة حل المسألة (الخطوات الاربع)

Problems sloving plan (The four steps)

فكرة الدرس: استعمال الخطوات الاربع في حل المسألة.

اليك المثال التالي:

تعلم: في مدينة الالعاب في بغداد قطار، يتسع لـ 9 أشخاص في كل عربة والقطار يتكون من 3 عربات، كم عدد الاشخاص الذين ركبوا القطار في 5 جولات التي قطعها قطار الالعاب؟

أفهم: ما معطيات المسألة؟ قطار مدينة الالعاب يتسع لـ 9 أشخاص في كل عربة والقطار فيه 3 عربات.

ما المطلوب من المسألة؟ ايجاد عدد الاشخاص الذين ركبوا القطار في 5 جولات؟

خطط: كيف تحل المسألة؟ استعمل الخطوات الاربعة لحل المسألة.

حل: نفرض عدد الجولات x وهي المدخلات الدالة ، قاعدة الدالة 27x ، y تمثل المخرجات.

لذا فأن عدد الاشخاص سيكون 135 في 5 جولات.

تحقق : القطار فيه 3 عربات في كل عربة تتسع لـ 9 أشخاص فقط. يمكن ان نكون جدول دالة يبين عدد الجولات وعدد الاشخاص الذين ركبوا القطار، نفرض عدد الجولات x وعدد الاشخاص y

اذن الحل صحيح وعدد الاشخاص الذين ركبوا القطار 135 في 5 جولات حيث ان قاعدة الدالة هي x(27).

عدد الجولات	القاعدة	عدد الاشخاص
x	27x	y
1	27 (1)	27
2	27 (2)	54
3	27 (3)	81
4	27 (4)	108
5	27 (5)	135

$27x = 27 \rightarrow x = 1$

$27x = 54 \rightarrow x = 2$

$27x = 81 \rightarrow x = 3$

$27x = 108 \rightarrow x = 4$

$27x = 135 \rightarrow x = 5$

مسائل:

1) سيارة نقل ماء، تضخ 75 لتر في الدقيقة لملء مسبح الماء، أكتب معادلة خطية تربط كمية الماء في المسبح بالزمن ثم انشيء رسماً بيانياً.

ما المعطيات في السؤال؟ كل دقيقة تضخ السيارة 75 لتراً من الماء في الحوض.

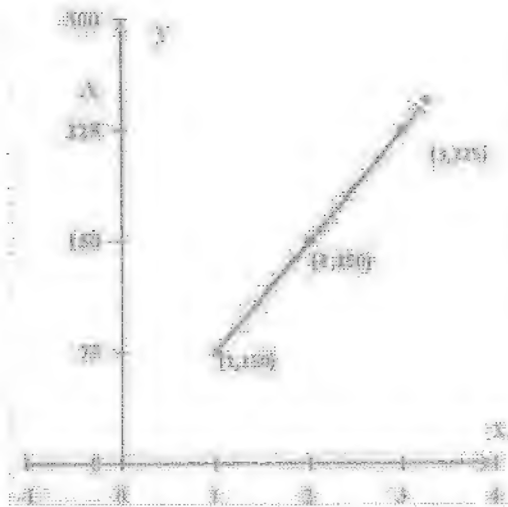
المطلوب: معادلة خطية تربط كمية الماء في المسبح بالزمن.

خطط: في الدقيقة الاولى 75 لتر والدقيقة الثانية 150 لتر والثالثة 225 لتر وهكذا لذلك نرمز للزمن x فالمعادلة تصبح (x75) اي

حل: $y = 75\,x$ حيث y كمية الماء بعد مرور الزمن

∴ المعادلة الخطية هي $y = 75x$ حيث x عدد الدقائق y كمية الماء

تحقق:



الزمن دقائق	المعادلة $y = 75x$	لتر Y
1	75 (1)	75
2	75 (2)	150
3	75 (3)	225

$75x = 75 \rightarrow x = 1$

$75x = 150 \rightarrow x = 2$

$75x = 225 \rightarrow x = 3$

أذن الحل صحيح باستخدام المعادلة الخطية

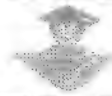
2) فيزياء: ترتفع درجة حرارة السائل °5 مئوية كل ساعة وكانت درجة الحرارة الاساسية °40 عندما بدأت رنا بالقياس ، ما درجة الحرارة بالنسبة لعدد الساعات. (تحل نفس الخطوات)

$y = 5x + 40 = 5(1) + 40 = 45°$ $\quad x \rightarrow 1$ بعد ساعة

$y = 5x + 40 = 5(2) + 40 = 50°$ $\quad x \rightarrow 2$ بعد ساعتين

$y = 5x + 40 = 5(3) + 40 = 55°$ $\quad x \rightarrow 3$ بعد 3 ساعات

وهكذا لذلك المعادلة الخطية $y = 5x + 40$ حيث y تمثل ارتفاع درجة الحرارة فوق الاربعين درجة. حيث x تتغير بمرور الساعات. (x ساعة)



3) بكتريا: يتضاعف عدد البكتريا كل 30 دقيقة بالانقسام الثنائي، كم يتضاعف عدد البكتريا خلال ساعتين؟ علماً ان عدد البكتريا كان 5 في الدقائق 10 الاولى؟

ساعتين = 30 × 4 = 120 دقيقة

وكان عدد البكتريا 5 في الدقائق 10 الاولى ← 15 = 5 × 3 = 10 ÷ 30

∴ عدد البكتريا في 30 دقيقة الاولى 15

اذن قيم x هي 30 , 60 , 90 , 120 , 150 , 180 فأن المعادلة الخطية

$$y = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(30) = 15 \qquad x \to 30$$

$$y = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(60) = 30 \qquad x \to 60$$

$$y = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(90) = 45 \qquad x \to 90$$

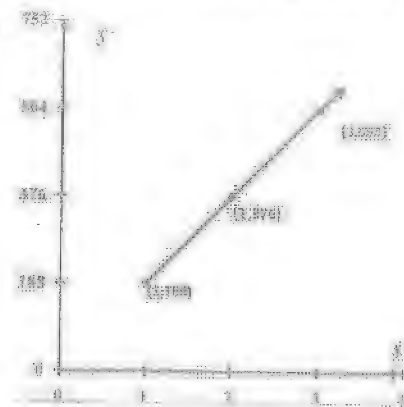
$$y = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(120) = 60 \qquad x \to 120$$

∴ عدد البكتريا في ساعتين = 60

4) اهوار الجنوب: أدرجت اهوار جنوب العراق ضمن لائحة التراث العالمي (مدي) من سكان اهوار الجنوب لديه 4 من الجاموس المنتج للحليب اذ أن الكمية المنتجة 188 لتراً يومياً ، فكم ستكون الكمية المنتجة خلال 3 أيام؟

انشيء جدول دالة ثم مثلهُ بالمستوي الاحداثي.

معادلة الدالة الخطية y = 188x حيث 188 لتر انتاج ثابت في اليوم الواحد.



المدخلة x	القاعدة y = 188x	المخرجة y	النقطة (x , y)
1	y = 188 (1)	188	(1,188)
2	y = 188 (2)	376	(2, 376)
3	y = 188 (3)	564	(3, 564)

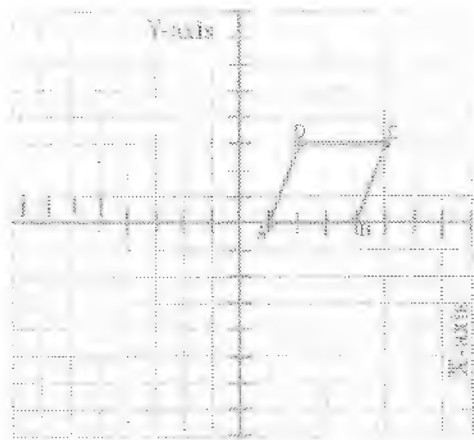
مراجعة الفصل Chapter 6 Review

المفردات تحفظ من صفحة 68 (كتاب) لاهميتها.

الدرس الاول : تمثيل جدول دالة محددة في المستوى الاحداثي.

مثال / مثل النقاط على المستوى الاحداثي وعين الربع الذي تنتمي اليه، ثم صل بين النقاط ، ما الشكل المنتج؟

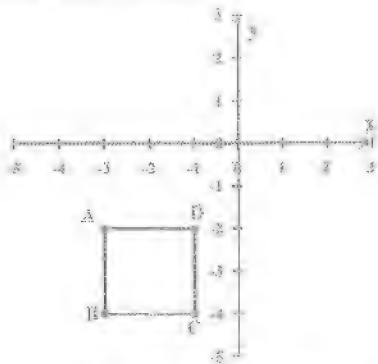
A(1,0) , B(4,0) , C(5,3) , D(2,3)



الشكل ABCD متوازي اضلاع ويقع في الربع الاول.

تدريب/ حدد الربع الذي ينتمي اليه الشكل بعد ان تمثل الجدول نقاط معينة في المستوى الاحداثي وتصل بين النقاط؟

x	y	(x,y)
-3	-2	(-3 , -2)
-3	-4	(-3 , -4)
-1	-4	(-1 , -4)
-1	-2	(-1 , -2)



الشكل الناتج مربع يقع في الربع الثالث

الدرس الثاني / مقدمة في الدوال

مثال1/ اكمل الجدول الدالة في كل مما يأتي:

العنصر	قاعدة الدالة	الصورة
x	$x^2 - 2x + 1$	y
1	$(1)^2 - 2(1) + 1$	0
2	$(2)^2 - 2(2) + 1$	1
3	$(3)^2 - 2(3) + 1$	4

تدريب1/ اكمل الجدول الدالة في كل مما يأتي:

العنصر	قاعدة الدالة	الصورة	الزوج المرتب
x	x |-3x+1|	y	(x, y)
-1	-1|-3(-1) +1|	-4	(-1,-4)
0	0|-3(0) +1|	0	(0 , 0)
1	1|-3(1) +1|	−2	(1 ,− 2)



مثال 1/ اكتب قاعدة الدالة من العناصر والصور

الصورة	قاعدة الدالة	العنصر
y	----------	x
6	1^2+5	1
9	2^2+5	2
14	3^2+5	3

قاعدة الدالة هي : x^2+5

تدريب 2/ اكتب قاعدة الدالة من العناصر والصور

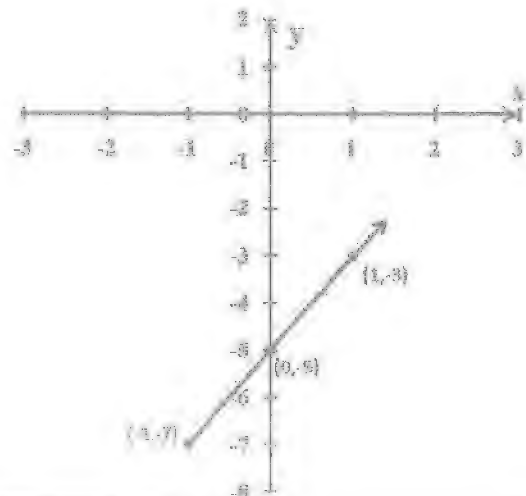
الصورة	قاعدة الدالة	العنصر
y	----------	x
-2	$(-2)^2-6$	-2
-6	$(0)^2-6$	0
-2	$(2)^2-6$	2

قاعدة الدالة هي : x^2-6

الدرس الثالث / الدالة الخطية

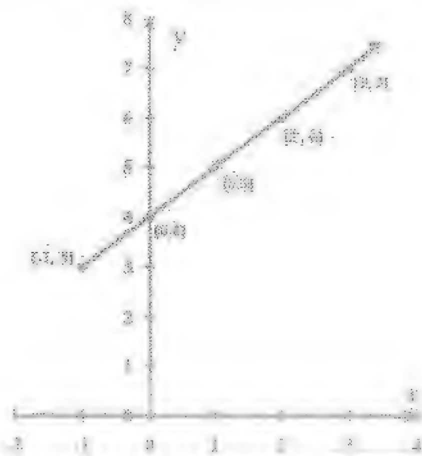
مثال / مثل الدالة الخطية في المستوى الاحداثي

الزوج المرتب	الصورة	قاعدة الدالة $2x-5$	العنصر x
(-1,-7)	-7	2 (-1) – 5	-1
(0 , -5)	-5	2 (0) – 5	0
(1 , -3)	-3	2 (1) – 5	1



تدريب : أكمل جدول الدالة ثم مثلة في المستوى الاحداثي:

الزوج المرتب (x , y)	الصورة	قاعدة الدالة $x+4$	العنصر x
(-1 , 3)	3	-1 + 4	-1
(0 , 4)	4	0 + 4	0
(1 , 5)	5	1 + 4	1
(2 , 6)	6	2 + 4	2
(3 , 7)	7	3 + 4	3



الدرس الرابع : الانعكاس والدوران في المستوي

مثال / ارسم صورة انعكاس الشكل المبين في الرسم البياني حول محور السينات ومحور الصادات.

A(-4 , 2) , (B(-2 ,2) , C(-2,4) , D(-4,4)

الانعكاس على محور السينات

$R_x[A(-4,2) = A'(-4,-2)$

$R_x[B(-2,2) = B'(-2,-2)$

$R_x[C(-2,4) = C'(-2,-4)$

$R_x[D(-4,4) = D'(-4,-4)$

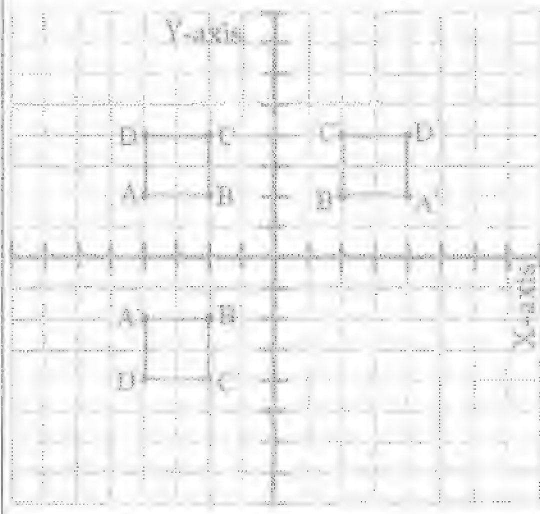
الانعكاس على محور الصادات

$R_y[A(-4,2) = A''(4,2)$

$R_y[B(-4,2) = B''(2,2)$

$R_y[C(-2,4) = C''(2,4)$

$R_y[D(-4,4) = D''(4,4)$



تدريب / ارسم صورة انعكاس الشكل المبين في الرسم البياني حول محور السينات ومحور الصادات.

A(-4,-4) , B(-3,-2) , C(-2,-4)

الانعكاس على محور السينات

$R_x[A(-4,-4) = A'(-4,4)$

$R_x[B(-3,-2) = B'(-3,2)$

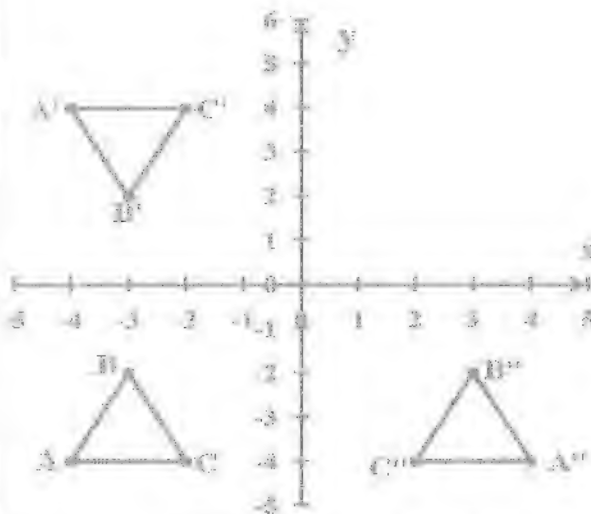
$R_x[C(-2,-4) = C'(-2,4)$

الانعكاس على محور الصادات

$R_y[A(-4,-4) = A''(4,-4)$

$R_y[B(-3,-2) = B''(3,-2)$

$R_y[C(-2,-4) = C(2,-4)$





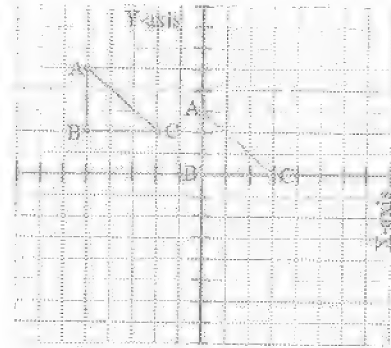
الدرس الخامس: الإنسحاب في المستوي الإحداثي

مثال / المثلث ABC رؤوسهُ

A(-5 , 5) , B(-5 , 2) , C(-2 ,2)

جد صورة انسحابه خمس وحدات لليمين ووحدتين للأسفل.

$T_{xy}[A(-5,5) = A'(-5+5,5-2)$
$= A'(0,3)$
$T_{xy}[B(-5,2)] = B'(-5+5,2-2)$
$= B'(0,0)$
$T_{xy}[C(-2,2)] = C'(-2+5,2-2)$
$= C'(3,0)$

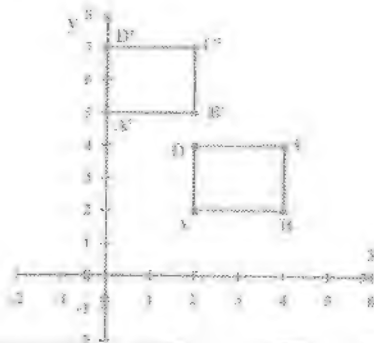


تدريب / الشكل ABCD رؤوسهُ

A(2,2) , B(4,2) , C(4,4) , B(4,2)

جد صورة انسحابه وحدتين لليسار وثلاث وحدات الى الاعلى.

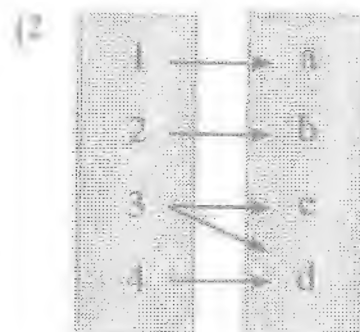
$T_{xy}[A(2,2)] = A'(2-2,2+3)$
$= A'(0,5)$
$T_{xy}[B(4,2)] = B'(4-2,2+3)$
$= B'(2,5)$
$T_{xy} = [C(4,4)] = C'(4-2,4+3)$
$= C'(2,7)$
$T_{xy}[D(2,4)] = D'(2-2,4+3)$
$= D(0,7)$



اختبار الفصل السادس Chapter 6 Test

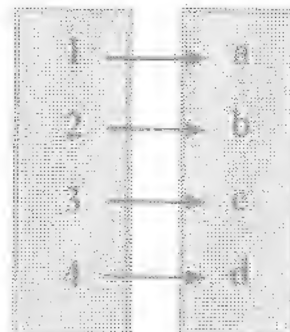
بين أتمثل العلاقات التالية دالة أم لا؟ اذكر السبب.

1)



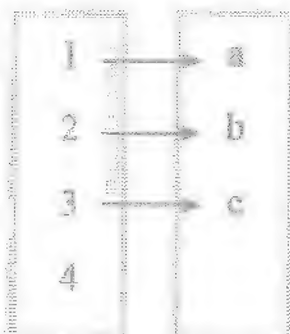
العلاقة ليست دالة لأن للعنصر 3 صورتان

2)



العلاقة تمثل دالة

3)



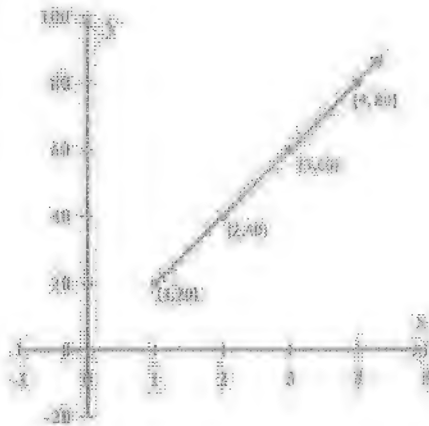
العلاقة ليست دالة لأن ليس للعنصر 4 صورة

مثل جدول الدالة بالمستوى الاحداثي ؟ ثم صل بين النقط.

4)

x	1	2	3	4
y	20	40	60	80

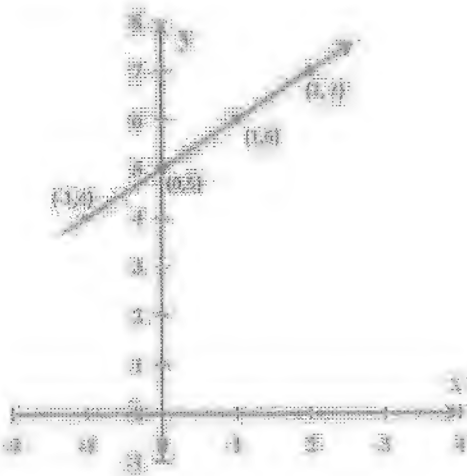
النقاط هي : (1 , 20) ، (2 , 40) ، (3 , 60) ، (4 , 80) عين النقاط على المستوى الاحداثي.



5)

x	-1	0	1	2
y	4	5	6	7

النقاط هي : (-1 , 4) ، (0 , 5) ، (1 , 6) ، (2 , 7) عين النقاط على المستوى الاحداثي.



6) من خلال المدخلات والمخرجات جد قاعدة الدالة.

x	-2	-1	0	1
y	-3	-2	-1	0

$-3-(-2)=-1$

$-2-(-1)=-1$

$-1-0=-1$

$0-1=-1$

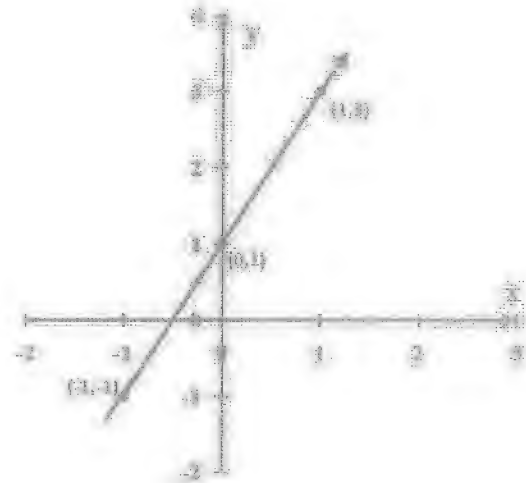
$y-x=-1 \rightarrow y=x-1$ ∴ قاعدة الدالة هي $y=x-1$



مثّل الدوال الخطية فيما يأتي:

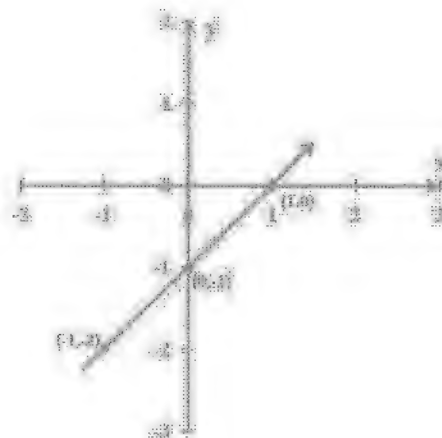
$y = 2x + 1$

x	y = 2x + 1	y	(x , y)
-1	y = 2 (-1) + 1	-1	(-1 , -1)
0	y = 2 (0) + 1	1	(0 , 1)
1	y = 2 (1) + 1	3	(1 , 3)



$y = x - 1$

x	y = x – 1	y	(x , y)
-1	y = -1 – 1	-2	(-1 , -2)
0	y = 0 – 1	-1	(0 , -1)
1	y = 1 – 1	0	(1 , 0)



7) عند دوران النقطة (2 , 3-) بزاوية °90 بأتجاه عكس عقارب الساعة ، ما النقطة التي ستحصل عليها؟

$T_{90}(-3,2) = (-2,-3)$

$T_{90}(x,y) = (-y,x)$ حيث°90 عكس اتجاه عقارب الساعة

∴ النقطة التي تحصل عليها هي (3- , 2-).

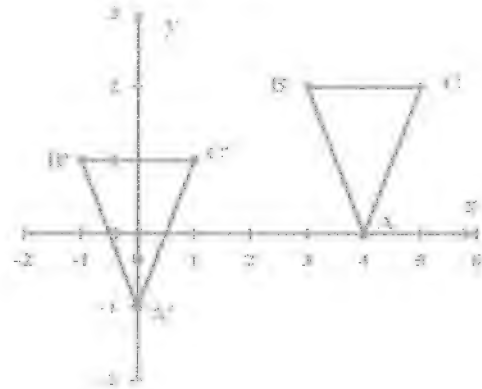
8) انسخ ثم جد صورة انسحاب الشكل بوحدة واحدة الى الاسفل و4 وحدات الى اليسار.

A(4 , 0) , B(3 , 2) , C(5 , 2)

$T_{xy}[A(4,0)] = A'(4-4, 0-1) = A'(0,-1)$

$T_{xy}[B(3,2)] = B'(3-4, 2-1) = A'(-1,1)$

$T_{xy}[C(5,2)] = A'(5-4, 2-1) = A'(1,1)$



9) انسخ ثم جد صورة دوران الشكل بزاوية مقدارها °270 بأتجاه عقارب الساعة.

A(-5 , -4) , B(-2 ,-4) , C(-2 , -2) , D(-5 ,-2)

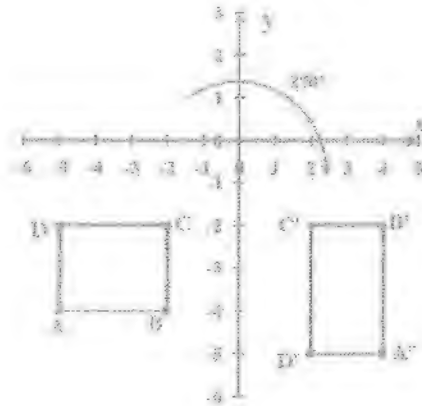
$R_{270}(x,y) = (-y,x)$ باتجاه°270 بأتجاه عقارب الساعة

$R_{270}[A(-5,-4)] = A'(4,-5)$

$R_{270}[B(-2,-4)] = B'(4,-2)$

$R_{270}[C(-2,-2)] = C'(2,-2)$

$R_{270}[D(-5,-2)] = A'(2,-5)$



(انتهى الفصل السادس)

عزيزي الطالب
التقط هذا الباركود
وريح قلبك





الفصل السابع Chapter 7

الاحصاء والاحتمالات / Statistics and Probabilities

الدرس الاول : مقياس النزعة المركزية والمدى.

الدرس الثاني : تمثيل البيانات ببيان الشارين

الدرس الثالث : التجربة العشوائية

الدرس الرابع : الحدث

الدرس الخامس: الأحتمالات

الدرس السادس : الأحتمال التجريبي والاحتمال النظري

الدرس السابع : خطة حل المسألة (تمثيل المسألة)

(الأختبار القبلي) Pritest

اختر الكلمة المناسبة من المفردات المجاورة لكي تكون جملة صحيحة:-

1- المدى هو الفرق بين اكبر قيمة واصغر قيمة في المجموعة المعطاة. المنوال

2- المنوال هي القيمة التي تتكرر اكثر من غيرها في المجموعة المعطاة. الوسيط

3- الوسيط هي القيمة التي تتوسط مجموعة البيانات المعطاة. المدى

4- الوسط الحسابي هي القيمة التي تساوي مجموع القيم المعطاة مقسوماً على عددها. الوسط الحسابي

رتب ما يلي تصاعدياً (من الاصغر الى الاكبر)

5) 9 ، 7 ، 6 ، 9 ، 8 ، 8 ، 6 ، 9.

الترتيب من الاصغر الى الاكبر : 6 ، 6 ، 7 ، 8 ، 8 ، 9 ، 9 ، 9.

6) 99 ، 97 ، 97 ، 100 ، 99 ، 90 ، 90 ، 97.

الترتيب من الاصغر الى الاكبر : 90 ، 90 ، 97 ، 97 ، 97 ، 99 ، 99 ، 100

اختر الاجابة الصحيحة من بين القوسين لكل مما يأتي:

7) بغداد عاصمة جمهورية العراق (ممكن ، مؤكد). **الجواب مؤكد.**

8) احتمال سحب كرة حمراء من كيس فيه كرات بيض فقط هي (50% , 0%). **الجواب 0%.**

9) بطاقات مرقمة من 1 الى 9 نسبة البطاقات التي تحمل ارقام زوجية هي (اقل من 50% ، 0%)

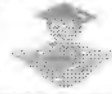
الجواب / اقل من 50%

10) اذا كان العدد 3 يمثل الساق والعدد 4 يمثل الورقة فأن العدد هو (43 ، 34). **الجواب/ 34**

11) مثل البيانات في الجدول المجاور بطريقة الساق والاوراق

65	70	68	76	65
72	69	74	71	69
76	65	71	72	68

الاوراق	الساق
5 5 5 8 8 9 9	6
0 1 1 2 2 4 6 6	7



... الوسيط والمنوال والمدى لكل مما يأتي:

9) 2 ، 6 ، 1 ، 8 ، 3 ، 2 ، 0 ، 5 ، 4

نرتب القيم 0 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 8 تصاعدياً.

العدد 3 يمثل الوسيط لأنه وسط القيم

المنوال = 2 لأنه اكثر تكراراً.

المدى = 8 − 0 = 8

10) 77 ، 71 ، 12 ، 15 ، 55 ، 30 ، 87

الترتيب 12 ، 15 ، 30 ، 55 ، 71 ، 77 ، 87

الوسيط = 55 لأنه اوسط القيم

المنوال لا يوجد لأن لا يوجد قيمة مكررة.

المدى = 87 − 12 = 75.

11) من التمثيل المجاور بالنقط:

مثل الاعداد بجدول تكراري



العدد	التكرار
1	1
2	3
3	0
4	1
5	4
6	0
7	5

الدرس الاول / مقياس النزعة المركزية والمدى

Admeasure of Central Tendency and Range

فكرة الدرس: ايجاد مقياس النزعة المركزية والمدى مستخدماً التمثيل بالساق والاوراق.

المفردات: المتوسط ، الساق ، الوسيط ، الورقة ، المنوال ، المدى.

واليك المثال التالي: تعلم

يبين الجدول المجاور درجات بعض طلاب الصف الثاني متوسط في مادة الرياضيات اوجد:

1- المدى 2- الوسيط 3- المنوال 4- المتوسط الحسابي

درجات الطلاب				
95	90	85	90	98
88	81	90	79	79
72	90	99	94	75

- تعلمت سابقاً تمثيل البيانات بطريقة الساق والورقة لمجموعة واحدة. في هذا الدرس ستتعلم تمثيل مجموعتين بطريقة الساق والورقة والمقارنة بينهما ويمكنك ايجاد مقياس التشتت والنزعة المركزية من خلال التمثيل بالساق والورقة.

ملاحظة: (الساق) يمثل العشرات من العدد و(الاوراق)يمثل الآحاد من العدد

مثال1: استعمل التمثيل بالساق والورقة للاجابة عن فقرة تعلم.

خطوة 1/استعمل التمثيل بالساق والورقة لعرض البيانات بعد ترتيبها تصاعدياً.

الساق (مرتبة العشرات)	الاوراق (مرتبة الاحاد)
7	2 5 9 9
8	1 5 8
9	0 0 0 0 4 5 8 9

خطوة 2/استعمل التمثيل بالساق والورقة للاجابة عن:

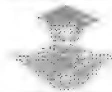
1)القيمة الكبرى = 99 القيمة الصغرى = 72

المدى = القيمة الكبرى - القيمة الصغرى

المدى = 99 - 72 = 27

2)الوسيط = 90 (القيمة الواقعة في منتصف البيانات في الجدول الساق والورقة)

اي بعد ترتيب القيم من الاصغر الى الاكبر.



ز) المنوال = 90 (هي الدرجة الاكثر تكراراً)

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{72 + 75 + \cdots + 99}{15} = 87$$

يمكن مقارنة مجموعتين من البيانات بالتمثيل المزدوج للساق والورقة.

مثال 2/ يبين الجدول المجاور تمثيل الساق والورقة لدرجات بعض الطلاب في مادتي الرياضيات والفيزياء.

الورقة (الفيزياء)	الساق	الورقة (الرياضيات)
8 5 1	7	3
9 8 4 4 2	8	0 2 3 3 7 8
9 6 5 3 0	9	1 0 0 5 6 7

i) اي الموضوعين مداه اكبر؟

مدى المجموعة الرياضيات = 97 − 73 = 24

مدى مجموعة الفيزياء = 99 − 71 = 28

لذا مدى مجموعة الفيزياء اكبر من مدى مجموعة الرياضيات

ii) وسيط مجموعة الرياضيات هو 88 اما الوسيط لمجموعة الفيزياء فهو 88 ايضا.

iii) ما اعلى درجة في الموضوع الرياضيات؟ 97

iv) ما اقل درجة في موضوع الفيزياء؟ 71

مثال 3/ اجريت مقارنة على المسافة التي تقطعها 9 سيارات بالكيلومترات داخل المدينة وعلى الطريق العام فكان الجدول ادناه.

	المسافة بالكيلومترات								
داخل المدينة	34	31	23	19	20	31	41	23	28
الطريق العام	27	30	32	28	38	41	32	38	28

i) انشئ التمثيل المزدوج بالساق والورقة بالبيانات اعلاه

ii) جد الوسيط والمنوال والمدى لكل منها.

الطريق العام	الساق	داخل المدينة
	1	9
7 8 8	2	8 3 3 0
0 2 2 8 8	3	4 1 1
1	4	1

المقياس	الطريق العام	داخل المدينة
الوسيط	32	28
المنوال	28 ، 32 ، 38	31 ، 23
المدى	41 − 27 = 14	41 − 19 = 22

iii) اي المجموعتين مداه اكبر؟

مجموعة السيارات داخل المدينة مداها = 22 مجموعة السيارات الطريق العام مداها = 14

لذا مجموعة السيارات داخل المدينة مداها اكبر.

تأكد من فهمك:

للتذكير : الساق والورقة: الساق (مرتبة العشرات) والورقة (مرتبة الاحاد)

المنوال : هي القيمة الاكثر تكراراً من بين القيم واذا وجدت قيمتين نفس التكرار تسمى المنوال الاول والمنوال الثاني. وإذا لم تكرر القيم سوى مرة واحدة لا يوجد منوال.

الوسيط: بعد ترتيب القيم تأخذ القيمة الوسطى تسمى (الوسيط) وإذا كان عدد القيم زوجياً فالوسيط هو معدل الوسطين (مجموعهما ÷ 2)

الوسط الحسابي : مجموع القيم ÷ عددها.

المدى = اكبر القيم – اصغرها.

الجدول المجاور يبين درجات الحرارة لبعض الايام

درجات الحرارة سليليزية				
24	30	36	32	38
2	31	35	13	15
38	32	38	38	13

1) استعمل التمثيل بالساق والورقة لتمثيل البيانات.

ترتب القيم تصاعدياً: 2 ، 13 ، 13 ، 15 ، 24 ، 30 ، 31 ، 32 ، 32 ، 35 ، 36 ، 38 ، 38 ، 38 ، 38.

2) اوجد المدى والوسيط والمنوال للبيانات

المدى = اكبر قيمة – اصغر قيمة = 38 – 2 = 36

الوسيط = 32 وسط القيم والمنوال = 38 لأنها اكثر تكرار

الساق	الورقة
0	2
1	3 3 5
2	4
3	0 1 2 2 5 6 8 8 8 8

3) اوجد: الوسط الحسابي للبيانات

الوسط الحسابي = $\frac{38+\cdots13+13+2}{15}$

= 27,66

مثال :يبين تمثيل الساق والورقة المجاور عدد النقاط التي حصل عليها مجموعتين من الفرق المدرسية في لعبة كرة السلة.

4) جد (المدى والوسيط والمنوال) لبيانات المجموعة الاولى.

المدى = 84 – 47 = 37



المجموعة (2)	الساق	المجموعة (1)
0	4	7 8 8
6 4 3 1	5	0 0 2 3 7
9 8 6	6	1 6
2 1	7	
3	8	4

الوسيط = 52 وسط القيم

المنوال = اولاً 48 ثانياً 50

5) اي المجموعتين مداه اصغر؟

مدى المجموعة (1) = 84 − 47 = 37

مدى المجموعة (2) = 83 − 40 = 43

اذن مدى المجموعة (1) أصغر من مدى المجموعة (2)

6) قارن بين الوسيطين للمجموعتين

وسيط المجموعة (1) = 52 وسيط المجموعة (2) = 66

7) انشئ التمثيل المزدوج بالساق والورقة ثم جد : المدى ، الوسيط ، المنوال لبيانات النوعين

النوع الثاني	الساق	النوع الاول
	4	3 5 9
8 8 4 4 2	5	2
4 1	6	3 4
	7	2

المدى المجموعة (1) = 72 − 43 = 29

المدى المجموعة (2) = 64 − 52 = 12

الوسيط مجموعة (1) = 52

الوسيط مجموعة (2) = 58

المنوال مجموعة (1) = لا يوجد المنوال مجموعة (2) = 54 ، 58

8) اي المجموعتين مداها اكبر؟

مدى المجموعة (1) اكبر من مدى المجموعة (2).

تدرب وحلّ التمرينات: استعمل تمثيل الساق والورقة المجاور وجد ما يأتي:

الساق	الورقة
0	8 9
1	0 2 4 6 8
2	7
3	4

9) المدى ، الوسيط ، المنوال للبيانات

المدى = 34 − 8 = 26

الوسيط = 14 وسط القيم

المنوال = لا يوجد لعدم تكرار اي رقم

10) الوسط الحسابي للبيانات = $\frac{34+27+18+16+14+12+10+9+8}{9} = 16.44$

يمثل الجدول ادناه عدد زوار المتحف البغدادي في اسبوعين متتاليين:

11) استعمل التمثيل المزدوج بالساق والورقة لتمثيل البيانات.

الاسبوع الاول	الساق	الاسبوع الثاني
6	3	0
4	4	0
0 8	5	9 2 0
1 3	6	6
0	7	0

12) اوجد: المدى (اسبوع الاول) = 70 − 36 = 34

المدى (اسبوع الثاني) = 70 − 30 = 40

الوسيط = 58 اسبوع الاول ، الوسيط = 52 اسبوع الثاني

المنوال = لا يوجد في كلا الحالتين

13) الوسط الحسابي (اسبوع الاول) = $\frac{382}{7}$ = 54.5 (اسبوع الثاني) = $\frac{367}{7}$ = 52.4 متقارب

تدرب وحل مسائل حياتية:

سرعة : الجدول المجاور يبين سرعة بعض السيارات على الطرق

الورقة	الساق
9	5
5 5 5 8 8 9 9	6
0 1 1 2 4 4 6	7

14) استعمل التمثيل بالساق والاوراق لتمثيل البيانات.

15) جد المدى ، الوسيط ، المنوال للبيانات

المدى = 76 − 59 = 17

الوسيط = 69

المنوال = 65

16) الوسط الحسابي = $\frac{70+\cdots+76+65}{15}$ = 69.1

طعام: استعمل تمثيل الساق والورقة المجاور واوجد ما يأتي:

كمية الدهن في فطائر اللحم والدجاج %		
لحم	الساق	دجاج
8 9	0	1
0 2 4 6 7	1	9 5
7	2	7 6 5
	3	4 3
0	4	1

17) ما اعلى كمية دهون في كل نوع؟

40% في اللحم و41% في الدجاج

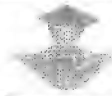
18) اي نوعين يحتوي كمية اقل من الدهن بصورة عامة؟

اللحم.

19) جد الوسيط لكلا الفطيرتين وقارن بينهما.

الوسيط (لحم) = 14

الوسيط (دجاج) = 26



فكر: 20) اعط مثالاً على مجموعة بيانات لهما نفس الوسيط والمنوال.

اعمار الطلاب هي 9 ، 11 ، 12 ، 12 ، 10 ، 8 ، 12 ، 12 ، 13

الترتيب 8 ، 9 ، 10 ، 11 ، 12 ، 12 ، 12 ، 12 ، 13

الوسيط = 12 المنوال = 12

21) أكتشف الخطأ : الجدول المجاور يمثل اوزان بعض المواد بالكيلوغرام، يحاول محمد ومهند تحليل البيانات الممثلة بالساق والورقة يقول محمد ان نصف الاوزان بين 40 و30 كيلوغرام ويقول مهند أنه لا يوجد اي وزن يزيد عن 70 كيلوغرام ايهما على صواب؟ وضح اجابتك.

الوزن بالكيلوغرام	
الورقة	الساق
4 5 6	3
0	4
6	5
2 8	7

كلام محمد صحيح لانه يوجد 36,35,34 كغم وكلام مهند خطأ لأنه يوجد 72 ، 78 كغم.

درجات: الجدول ادناه يمثل درجات امتحان شعبتين في موضع الرياضيات.

22) استعمل البيانات في التمثيل المزدوج بالساق والورقة واجب:

درجات الطلاب		
شعبة A	الساق	شعبة B
2	5	
6	6	6 0 0
3 7	7	
0 1	8	4 0
0	9	90

23) ما الوسيط في شعبة A؟

الوسيط = 77

24) ما المنوال في شعبة B ؟

المنوال = 60

25) أي الشعبتين مداها اصغر؟

مدى شعبة A = 90 – 52 = 38

مدى شعبة B = 99 – 60 = 39

اذن مدى شعبة A اصغر من مدى شعبة B.

اكتب: مسألة يمكن حلها بتحليل التمثيل المزدوج بالساق والورقة ، وضح كيف يمكنك استعمالهُ لايجاد المدى ، والوسيط ، المنوال.

شركتان لأنتاج السيارات وحسب الجدول ادناه ولمدة خمس ايام.

شركة A	35	41	45	45	50
شركة B	45	43	51	51	38

مثل البيانات بتحليل التمثيل المزدوج وجد المدى ، الوسيط ، المنوال لكل شركة.

رتب القيم تصاعدياً من الاصغر الى الاكبر لكل شركة ثم ارسم الجدول للتمثيل المزدوج البياني

عدد السيارات المنتجة		
شركة B	الساق	شركة A
8	3	5
5 3	4	1 5 5
1 1	5	0

المدى (شركة A) = 50 – 35 = 15

اخر قيمة من الجدول – اول قيمة من الجدول

او اكبر قيمة – اصغر قيمة

المدى (شركة B) = 51 – 38 = 13

المنوال (شركة A) = 45 المنوال (شركة B) = 51

الوسيط (شركة A) = 45 الوسيط (شركة B) = 45

الوسيط تمثل القيمة الوسطى

الدرس الثاني / تمثيل البيانات ببيان الشاربين

Representation of Data by Box – whisker

فكرة الدرس: تمثيل البيانات ببيان الشاربين ومقارنة بين الشاربين.

المفردات : بيان الشاربين – الربيع الاعلى – الربيع الادنى – المدى الربيعي.

واليك المثال التالي:

تعلم : سجل احد لاعبي كرة السلة في كل مباراة النقاط التالية:

35 ، 37 ، 40 ، 35 ، 38 ، 46 ، 46 ، 42 ، 37 ، 40

كيف أمثل البيانات ببيان الشاربين؟

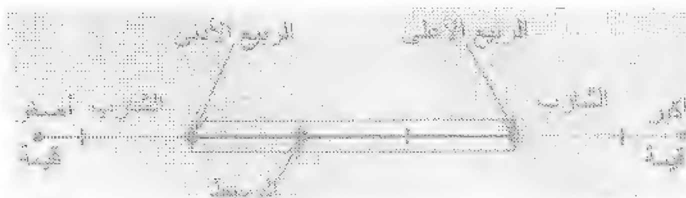
- بيان الشاربين: **Box and whisker Graph**

لكي تنشئ بيان الشاربين يجب تقسيم البيانات بعد ترتيبها الى اربعة اقسام باستعمال الربيعات ، الوسيط أو الربيع الاوسط يقسم البيانات الى نصف الادنى ونصف اعلى.

الوسيط في النصف الادنى: هو الربيع الادنى.

الوسيط في النصف الاعلى : هو الربيع الاعلى

هذه التقسيمات توزع على مستقيم الاعداد.





مثال 1/ انشئ بيان شاربين للبيانات الآتية:

40 ، 37 ، 42 ، 46 ، 46 ، 38 ، 35 ، 40 ، 37 ، 35

الخطوة (1) : رتب البيانات تصاعدياً. حدد القيمة الصغرى والكبرى ثم الوسيط وبعدها الربيع الادنى والربيع الاعلى.



$$\frac{35+37}{2}=36 \quad \frac{38+40}{2}=39 \qquad \frac{42+46}{2}=44$$

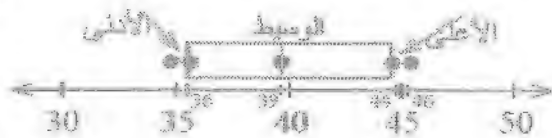
الخطوة (2): ارسم مستقيم الاعداد وضع نقطة فوقه لكل قيمة وجدت في الخطوة (1)



الخطوة (3) ارسم مستطيلاً بدءاً من الربيع الادنى وانتهاء عند الربيع الاعلى، وأرسم داخل المستطيل خط مستقيم يدل على الوسيط، ثم ارسم الشاربين من قيمة الصغرى والقيمة الكبرى حتى المستطيل.

المدى الربيعي = الربيع الاعلى – الربيع الادنى

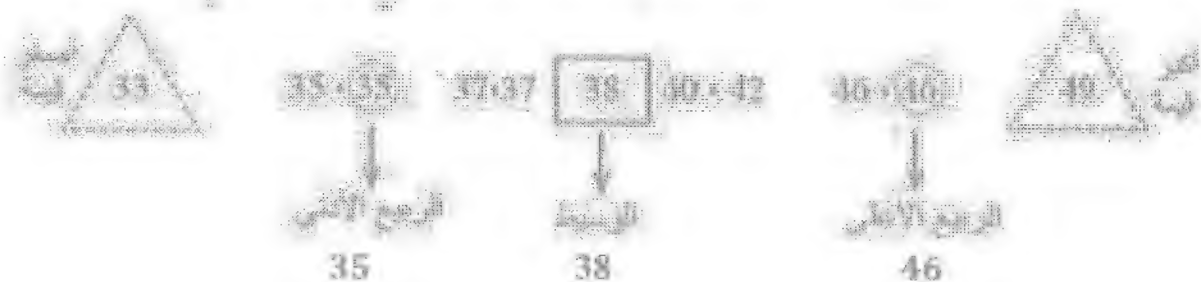
المدى الربيعي = 36 – 44 = 8 (يساوي طول المستطيل)



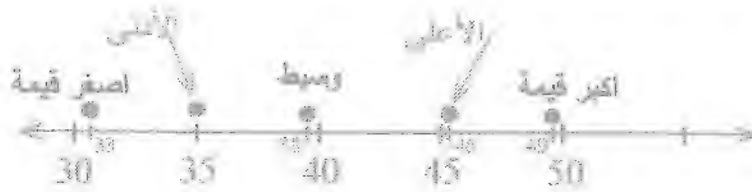
مثال 2/ انشئ بيان شاربين للبيانات الآتية:

37 ، 46 ، 35 ، 40 ، 42 ، 46 ، 38 ، 49 ، 37 ، 35 ، 33

رتب البيانات تصاعدياً ، حدد القيمة الصغرى والكبرى ثم الوسيط وبعدها الربيع الادنى والربيع الاعلى.



ارسم مستقيم الاعداد وضع فوقه نقطة لكل قيمة.



ارسم مستطيلاً بدأ من الربيع الادنى وانتهاء عند الربيع الاعلى ، ارسم داخل المستطيل خط مستقيم يدل على الوسيط ثم ارسم الشاربين من قيمة الصغرى والكبرى حتى المستطيل.

المدى الربيعي = الربيع الاعلى − الربيع الادنى

$46 - 35 = 11$ (يساوي طول المستطيل)



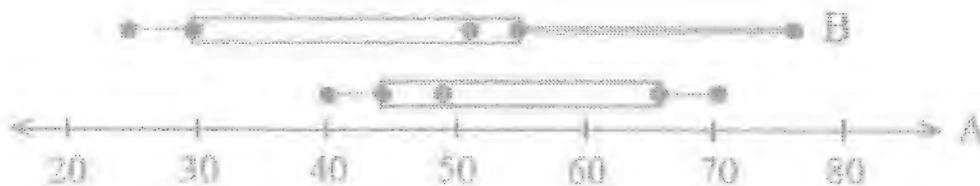
خلاصة ايجاد الشاربين:

أ) نرتب القيم تصاعدياً من اليسار الى اليمين ثم نحدد اصغر قيمة واكبر قيمة والوسيط. فالقيم الاربعة الاولى قبل الوسيط (الربيع الادنى) نجد الوسيط لها والقيم الاربعة الاخيرة (الربيع الاعلى) نجد الوسيط لها. ثم نعين هذهِ النقاط على خط الاعداد (خمس نقاط) نرسم مستطيل حدودهُ قيمة الوسيط للربيع الادنى والاعلى وطولهُ هي المسافة من الربيع الادنى الى الاعلى ويسمى المدى الربيعي ونعين الوسيط وسط هذا المستطيل. نرسم مستقيم من القيمة الاصغر الى الوسيط الادنى كذلك من القيمة الاكبر الى الوسيط الاعلى تسمى شاربين.

- المقارنة باستعمال الشاربين: Comperer by using whisker

يمكنك استعمال بيان الشاربين للمقارنة بين مجموعتين في البيانات وذلك بوضع احدهما بمحاذاة الآخر.

مثال 3/ يبيّن بيان الشاربين ادناه كيف بيانات شركتي A , B لأنتاج نوع خاص من ادوات المطبخ.



من خلال الشكل اعلاه اجب عما يأتي:

- أي الشركتين وسيطهما اكبر؟ وسيط الشركة B اكبر من وسيط الشركة A

- اي الشركتين لديها مدى ربيعي اكبر؟ المدى الربيعي للشركة B هو الاكبر.

حيث طول المستطيل في بيان الشاربين يمثل المدى الربيعي.

- اي الشركتين ستنتج ادوات اكثر؟

المدى والمدى الربيعي في بيان الشركة A هما اصغر من المدى والمدى الربيعي في بيان الشركة B. وهذا يعني ان التغيير في بيانات الشركة A اقل من التغيير في بيانات الشركة B. لذا انتاج شركة A ممكن ان يكون الاكثر.

تأكد من فهمك/ انشئ بيان شاربين للبيانات الآتية:

1) 17 , 23 , 26 , 29 , 17 , 21 , 19 , 28 , 20

نرتب القيم تصاعدياً

اصغر قيمة 17 , 17,19 , 20, 21 , 23 , 26,28 , 29 اكبر قيمة

الربيع الادنى $\frac{17+19}{2}=18$

الوسيط 21

الربيع الاعلى $\frac{26+28}{2}=27$

نتبع نفس الخطوات في المثال 1، 2

شارب، الادنى، وسيط، الاعلى، شارب

15 17 18 20 21 25 27 29 30

2) 81 ، 76 ، 73، 72 ، 72 ، 75 ، 79 ، 85

نرتب القيم تصاعدياً

اصغر قيمة 72 , 72 , 73 , 75 , 76 , 79 , 81 , 85

الربيع الادنى 72

الوسيط $\frac{75+76}{2}=75.5$

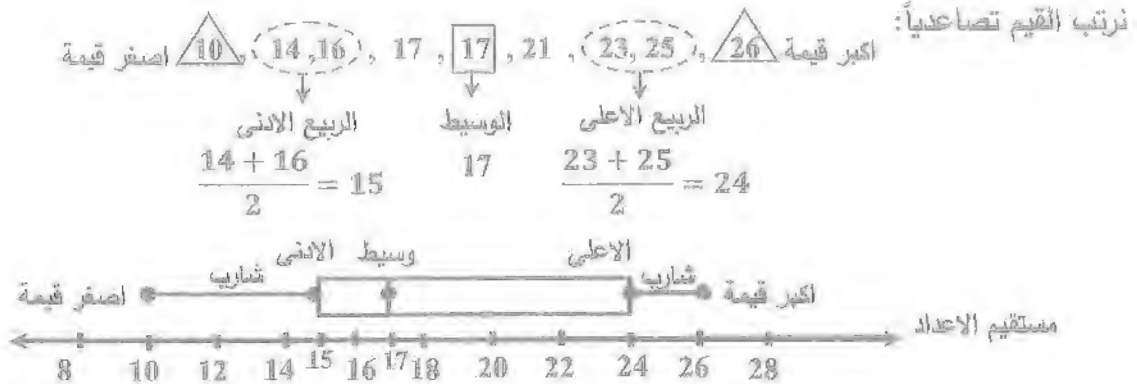
الربيع الاعلى 81

اصغر قيمة، شارب، الادنى، وسيط، الاعلى، شارب، اكبر قيمة

مستقيم الاعداد

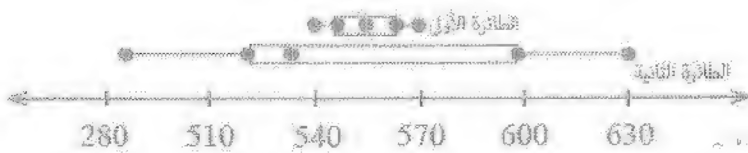
70 72 74 75.5 76 78 80 81 82 84 85 86

3) 10 ، 25 ، 17 ، 14 ، 21 ، 23 ، 17 ، 26 ، 16



لدى محمد ومهند طائرتان ورقيتان، يمثل بيانا الشاربين المسافات التي ارتفعت بها كل من الطائرتين.

4) اي طائرة وسيطها اقل؟ **الطائرة الثانية**



5) اي طائرة مداها الربيعي اكبر؟

الطائرة الثانية

6) اي طائرة يبدو انها تطير مسافة اقل؟ **الطائرة الاولى**

يمثل بيانا الشاربين عدد زوار مجمعين للتسويق A ، B.

7) قارن بين الوسيطين وبين المديين.

نفس الوسيط للمجمع A وللمجمع B . والمدى والمدى الربيعي للمجمع B اكبر من المجمع A.

8) قارن بين المدى الربيعي بعدد زوار المجمع A مع عدد زوار المجمع B.

عدد زوار المجمع A = 12 − 7 = 5

عدد زوار المجمع B = 13 − 5 = 8

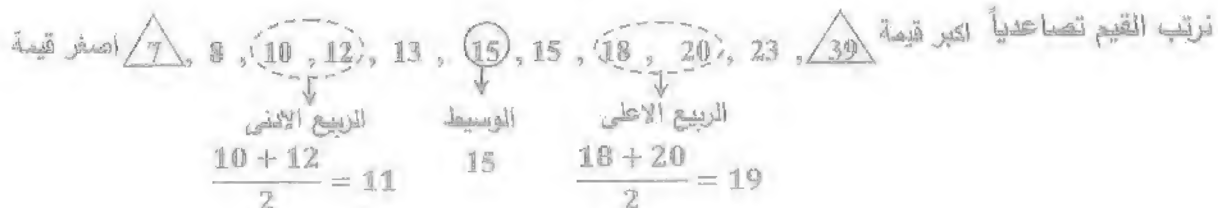
لذلك عدد زوار المجمع B اكبر من عدد زوار المجمع A

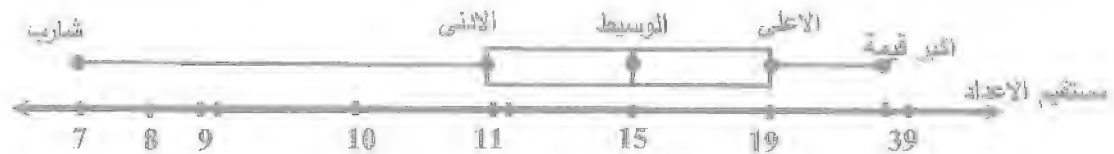
وعليه المدى الربيعي للمجمع B اكبر المدى الربيعي للمجمع A.

تدرب وحل التمرينات:

أنشئ بيان شاربين للبيانات الآتية:

9) 39 ، 18 ، 15 ، 20 ، 8 ، 15 ، 23 ، 7 ، 10 ، 13 ، 12





10) 22 ، 18 ،17 ، 18 ، 18 ، 25 ، 24 ، 24 ، 18 ، 29 ، 23

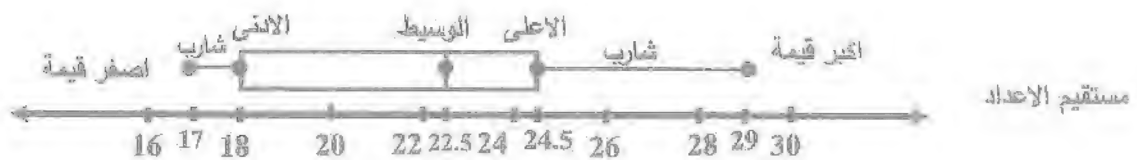
نرتب القيم تصاعدياً

اصغر قيمة 17 , 18 , 18 , 18 , 22 , 23 , 24 , 24 , 25 , 29 اكبر قيمة

الربيع الادنى $\frac{18+18}{2}=18$

الوسيط $\frac{22+23}{2}=22.5$

الربيع الاعلى $\frac{24+25}{2}=24.5$



11)

الساق	4	5	6	7
الورقة	3 5 9	2 7	3 4	2

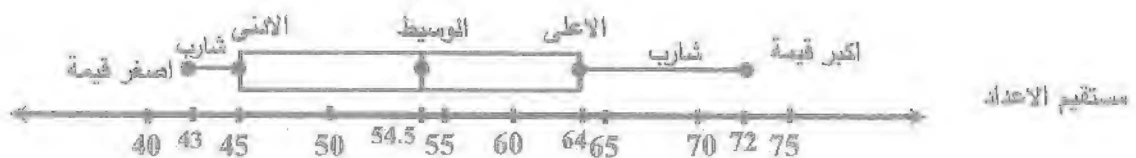
القيم:

اصغر قيمة 43 , 45 , 49 , 52 , 57 , 63 , 64 , 72 اكبر قيمة

الربيع الادنى 45

الوسيط $\frac{52+57}{2}=54.5$

الربيع الاعلى 64



يمثل بيانا الشاربين عدد زوار حديقة الزوراء والمتحف البغدادي في بعض الايام.



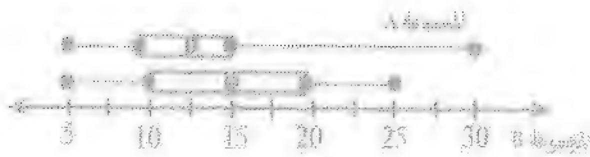
12) اي المكانين وسيطهُ اكبر؟ **الزوراء**

13) اي المكانين مداه الربيعي اكبر؟ **الزوراء**

14) اي المكانين يبدو انهُ تستقبل عدد اكبر من الزوار؟ **الزوراء.**

يمثل بياناً الشاربين المجموعتين A , B

15) جد الوسيط في كلا المجموعتين وقارن بينهما.



الوسيط في المجموعة A = $\frac{10+15}{2}$ = 12.5

الوسيط في المجموعة B = 15

وسيط المجموعة B اكبر من وسيط المجموعة A.

16) جد المدى الربيعي في كل من المجموعتين وقارن بينهما.

المدى الربيعي للمجموعة A = 15 − 10 = 5

المدى الربيعي للمجموعة B = 20 − 10 = 10

تدرب وحل مسائل حياتية:

17) ملابس : يمثل الجدول التكراري قياس 12 بدلة رجالية

القياس	48	50	52	54	65
التكرار	3	4	2	2	1

القياسات

48 ، 48 ، 48 ، 50 ، 50 ، 50 ، 50 ، 52 ، 52 ، 54 ، 54 ، 65

مثل الجدول اعلاه ببيان الشاربين

18) زراعة : مثلت اطوال 8 نباتات بالسنتمرات بطريقة الساق والورقة المبينة في الجدول ادناه، مثل البيانات بالشاربين.

الساق	3	4	5
الورقة	1 1 2	3 5 8	2 4

ترتيب القيم: من الساق والورقة

اكبر قيمة 54 , 52 , 48 , 43 , 45 , 32 , 31 , 31 اصغر قيمة

الربيع الاعلى 52 — الوسيط $\frac{43+45}{2} = 44$ — الربيع الادنى 31



رياضة: يمثل بيان الشاربين عدد المباريات التي لعبها لاعبين في كرة القدم خلال السنوات الاربعة عشر الاولى من احترافهما.

19) اي لاعب يبدو ان عدد مبارياته اكثر؟ **اللاعب الثاني.**

20) اي لاعب وسيطة اكبر؟ **اللاعب الثاني**

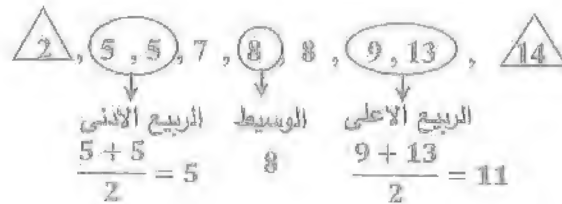
21) اي لاعب مداه الربيعي اكبر؟ **اللاعب الاول**



فكر : 22) اكتشف الخطأ: استعمل محمود البيانات الآتية: 8 ، 5 ، 7 ، 13 ، 5 ، 14 ، 9 ، 2 ، 8

ووجد أن الربيع الادنى (11) بين خطأ محمود وصححة.

ترتيب القيم:



$$\frac{5+5}{2}=5 \qquad 8 \qquad \frac{9+13}{2}=11$$

اذن جواب محمود هو الربيع الاعلى 11 والادنى 5.

23) تحدٍ: اذا كان المدى الربيعي لمجموعة بيانات يساوي 9، وكان الربيع الاعلى يساوي 27 من قيمة الربيع الادنى.

المدى الربيعي = الربيع الاعلى – الربيع الادنى

9 = 27 – الربيع الادنى ⟸ الربيع الادنى = 27 – 9 = 18

24) مسألة مفتوحة: اكتب مجموعة بيانات عند تمثيلها بالشاربين يكون المستطيل طويلاً والشاربين قصيرين.

مقارنة : **قارن عدد القيم في المستطيل مع عددها في الشاربين. (شبيه بالسؤال 18)**

عدد القيم في المستطيل 4 وفي الشاربين 1 ، 1 من كل جهة.

أكتب / حالات التشابه والاختلاف بين تمثيل البيانات في الساق والورقة والتمثيل في الشاربين.

التمثيل في الساق والورقة نرتب القيم تصاعدياً كما في الشاربين. وفي الساق والورقة نستطيع نميز المجال الذي يكون فيه القيم أكثر بينما الشاربين الاكثر والاقل.

الدرس الثالث / التجربة العشوائية Random Experment

فكرة الدرس: التعرف الى التجربة العشوائية. كتابة نتائج التجربة العشوائية بمخطط الشجرة. كتابة النتائج باستعمال قانون العد الاساسي.

المفردات : الفعل العشوائي ، الحدث ، التجربة العشوائية ، النتيجة ، قانون العد الاساسي واليك المثال التالي: تعلم:

رمى محمد حجر النرد مرة واحدة ، وطلب الى أخته تمارة تسجيل الارقام التي ظهرت.

- ماذا نسمي مجموعة النواتج الممكنة؟ النرد (الزار)
- ماذا نسمي مجموعة الارقام الاولية؟

التجربة العشوائية: كل نشاط تأتي نتائجه مصادفة. (مثل رمي حجر النرد)

الفعل العشوائي : هو فعل يؤدي الى نتيجة غير معروفة مسبقاً.

مجموعة النتائج: هي المجموعة المؤلفة من جميع النتائج الممكنة لفعل عشوائي وتسمى (فضاء العينة) ويرمز لها (Ω).

الحدث: هو نتيجة ممكنة او مجموعة من النتائج الممكنة.

مثال 1/ حجر النرد رقم من 1 الى 6 كل رقم يمكن ان يظهر مرة واحدة، اي النتائج الممكنة 6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1

مجموعة النواتج الممكنة تدعى فضاء العينة وسوف نرمز لها Ω

اذن $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ تجربة عشوائية بسيطة.

الارقام الاولية هي 5 , 3 , 2 وهي مجموعة جزئية من فضاء العينة نكتبها بشكل مجموعة حدث بسيط.

$$E = \{2,3,5\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}$$

مثال 2/ رمي قطعتي نقود معدنية مرة واحدة:

i) اكتب مجموعة النتائج الممكنة.

ii) اكتب النتائج التي تحقق الحدث: ظهور وجهين متشابهين على القطعتين.

i) نسمي الوجه الاول للقطعة المعدنية H (الصورة) وسميت الوجه الثاني T (الكتابة)

فسوف تحصل على 4 نتائج ممكنة ، انشئ مخطط الشجرة ليساعدك على عرض كل النتائج الممكنة كما مبين من مخطط الشجرة مجموعة النتائج هي:

$$H\begin{cases}H, H\\ H, T\end{cases}$$

$$T\begin{cases}T, H\\ T, T\end{cases}$$

$$\Omega = \{(T,T), (T,H), (H,T), (H,H)\}$$



ii) يتحقق الحدث اذا كانت النتيجة (H , H) , (T , T) وهي مجموعة جزئية من فضاء العينة

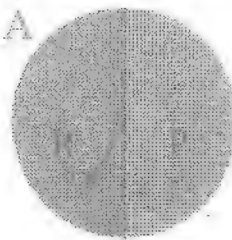
$E = \{(T,T),(H,H)\} \subset \Omega\{(T,T),(T,H),(H,T),(H,H)\}$

مثال 3/ اطلق طارق مؤشر القرص A ومؤشر القرص B

i) اكتب مجموعة النتائج الممكنة.

ii) اكتب النتائج التي تحقق الحدث، مؤشر القرص B على العدد 3.





i) انشئ مخطط شجرة ليساعدك على عرض كل النتائج الممكنة.

القرص B   القرص A

R ← 1 ، (R , 1)
R ← 2   (R , 2)
R ← 3   (R , 3)
P ← 1   (P , 1)
P ← 2   (P , 2)
P ← 3   (P , 3)

مجموعة النتائج الممكنة $\Omega = \{(R,1),(R,2),(R,3),(P,1),(P,2),(P,3)\}$

$E = \{(R , 3) , (P , 3)\}$

قانون العد الاساسي: Fundamental Counting Principle

ينص قانون العد الاساسي : على أن النتائج الممكنة لتجربة عشوائية تقوم على فعلين عشوائيين هو ناتج ضرب عدد نتائج الفعل الاول (m) في عدد نتائج الفعل الثاني (n) اي ان عدد نتائج الفعلين $m \times n$.

مثال 4/ رمي قطعتي نقود معدنية مرة واحدة. استعمل قانون العد الاساسي لأجد نتائج التجربة.

مع قطعة النقود الاولى تظهر نتيجتان ولتكن $m = 2$

مع قطعة النقود الثانية تظهر نتيجتان ولتكن $n = 2$

استعمال قانون العد الاساسي: عدد نتائج = $m \times n$

لذلك عدد النتائج كلها $2 \times 2 = 4$

ii) في مثال (3)

مع القرص A عدد النتائج الممكنة 2 (احمر ، ازرق) ولتكن $m = 2$

مع القرص B عدد النتائج الممكنة 3 (1 , 2 , 3) ولتكن $n = 3$

استعمل قانون العد الاساسي : عدد النتائج للتجربة = $m \times n$

لذا عدد النتائج كلها $2 \times 3 = 6$

iii) رميت حجر النرد واطلقت قرص فيه 4 أقسام مرقمة (4 , 3 , 2 , 1) ما عدد النتائج الممكنة؟

مع حجر النرد 6 (6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1) نتائج ولتكن $m = 6$

مع القرص 4 (4 , 3 , 2 , 1) نتائج ولتكن $n = 4$

استعمال قانون العد الاساسي: عدد النتائج للتجربة = $m \times n$

لذا عدد النتائج كلها $6 \times 4 = 24$

تأكد من فهمك:

1) تريد سعاد الجلوس على كرسي من بين 8 كراسي مرقمة من 1 الى 8

i) اكتب مجموعة النتائج الممكنة.

مجموعة النتائج الممكنة $\Omega = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8\}$

ii) اكتب النتائج التي تحقق الحدث (جلوسها على كرسي يحمل رقماً زوجياً)

الحدث مجموعة للنتائج الممكنة $E = \{2 , 4 , 6 , 8\}$

اكتب جميع النتائج الممكنة مستعملاً مخطط الشجرة ثم جد:

2) رمي قطعة نقود واطلاق مؤشر القرص المقابل اكتب مجموعة النتائج الممكنة

مع قطعة النقود 2 (H , T) نتيجة $m = 2$

مع القرص 3 (3 , 2 , 1) نتائج ولتكن $n = 3$

لذا عدد النتائج الممكنة $m \times n = 2 \times 3 = 6$



3) اكتب النتائج التي تحقق الحدث (ظهور كتابة ووقوف المؤشر على رقم 1)

$E = \{(T , 1)\}$

الشجرة

القرص		قطعة النقود
(H , 1) ،	1	
(H , 2)	2	H صورة
(H , 3)	3	
(T , 1)	1	
(T , 2)	2	T كتابة
(T , 3)	3	



4) لدى مهند 2 ستر سوداء ولديه ايضاً قميص ابيض وقميص نيلي وقميص رمادي بكم طريقة يمكن لمهند ان يرتدي قميصاً وسترة معاً.

مع الستر 2 (سوداء وبنية) نتيجة $m = 2$ ومع القمصان 3 (ابيض ، نيلي ، رمادي) $n = 2$

عدد النتائج (الطرق التي يرتدي بها قميص وسترة) = $m \times n = 3 \times 2 = 6$ طرق

تدرب وحل التمرينات:

5) تنتظر ساره وامل الباص من بين 6 باصات تحمل الارقام من 1 الى 6.

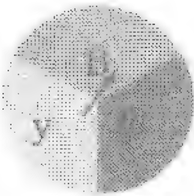
i) **اكتب مجموعة النتائج الممكنة:** $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ii) **اكتب النتائج التي تحقق الحدث (ركوب سارة باصاً يحمل رقم فردي اصغر من 6)**

$E = \{1, 3, 5\}$

iii) **اكتب النتائج التي تحقق الحدث (ركوب امل باصاً يحمل رقم زوجي)**

$E = \{2, 4, 6\}$



6) رمي حجر النرد واطلاق مؤشر القرص المقابل

i) اكتب مجموعة النتائج الممكنة

$\Omega\{(R,1),(R,2),(R,3),(R,4),(R,5),(R,6),(B,1),(B,2),(B,3),(B,4),(B,5),$
$(B,6),(y,1),(y,2),(y,3),(y,4),(y,5),(y,6)\}$

ii) اكتب النتائج التي تحقق الحدث (ظهور عدد اولي على الحجر ووقوف المؤشر على اللون الاحمر)



الاعداد الاولية على الحجر هي $\{2, 3, 5\}$

لذلك $E = \{(R, 2), (R, 3), (R, 5)\}$

iii) اكتب النتائج التي تحقق الحدث (ظهور عدد اكبر من خمسة على الحجر ووقوف المؤشر على اللون الاصفر)

عدد اكبر من خمسة هو 6 فقط لذلك $E = \{(y, 6)\}$

iv) استعمل قانون العدد الاساسي لايجاد العدد الكلي للنتائج

مع حجر النرد 6 نتائج $m = 6$

مع القرص 3 نتائج $n = 3$

استعمل قانون العد الاساسي : **عدد نتائج التجربة = $m \times n$**

لذا عدد النتائج كلها $m \times n = 6 \times 3 = 18$

تدرب وحل مسائل حياتية:

7) انترنيت: يريد رياض ان يختار كلمة السر الخاصة لدخول الإنترنيت ، تتكون الكلمة من حرفين من مجموعة الحروف A ، B ، C متبوعة بأحد الارقام الثلاثة 3 , 2 , 1. كم كلمة سر يمكنه ان يشكلها مستعملاً قانون العد الإساسي؟ اكتب جميع النتائج الممكنة.

عدد الكلمات الممكنة وهي AB ، AC ، BC او BA ، CA ، CB لذلك $m = 6$

عدد الارقام {3 , 2 , 1} هي 3 لذلك $n = 3$

قانون العد الاساسي = $m \times n$

لذلك عدد الكلمات $m \times n = 6 \times 3 = 18$

8) طعام : يمكن ان يختار زبون عند الفطور بين الجبن والبيض المقلي، كما يمكنهُ ان يشرب حليب او عصير برتقال او عصير تفاح.

i) اكتب كل الخيارات الممكن للزبون.

$\Omega =$ {(حليب , جبن) , (برتقال , جبن) , (تفاح , جبن) , (حليب , بيض) , (برتقال , بيض) , (بيض و تفاح)}

ii) اكتب النتائج الممكنة التي تحقق الحدث (تناول الجبن وعصير الفاكهة)

$E =$ {(عصير البرتقال , جبن) , (عصير تفاح , جبن)}

iii) جد عدد النتائج كلها مستعملاً قانون العد الاساسي:

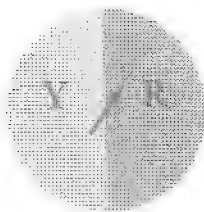
$m = 2 \;\; , n = 3$

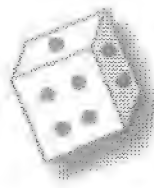
قانون العد الاساسي = $m \times n$

∴ عدد النتائج كلها = $m \times n = 2 \times 3 = 6$

فكّر: 9) تحدٍّ: رميت حجر النرد وقطعة معدنية ثم تدوير مؤشر قرص فيه قسمين

i) اكتب النتائج الممكنة. {H , T} H صورة ، T كتابة





$\Omega = [(1,H,R),(1,H,Y),(1,T,R),(1,T,Y),(2,H,R),(2,H,Y),(2,T,R),$
$(2,T,Y),(3,H,R),(3,H,Y),(3,T,R),(3,T,Y),(4,H,R),(4,H,Y),(4,T,R),(4,T,Y)$
$,(5,H,R),(5,H,Y),(5,T,R),(5,T,Y),(6,H,R),(6,H,Y),(6,T,R),(6,T,Y)]$

ii) عدد النتائج الممكنة $6 \times 2 \times 2 = 24$



10) صحة الجدول المجاور يحتوي على ثلاث مجموعات :

المجموعة A	المجموعة B	المجموعة C
جبن	لحم	خضر
بيض	دجاج	فواكه
لبن	سمك	

i) جد عدد النتائج الممكن للمجموعة A مع المجموعة B

$m = 3 , n = 3 \rightarrow m \times n = 3 \times 3 = 9$

ii) اكتب النتائج الممكنة للمجموعة A مع المجموعة C

E = {(خضر , جبن) , (فواكه, جبن) , (خضر , بيض) , (فواكه ,بيض) ,

(خضر , لبن) , (فواكه , لبن)}

iii) اكتب النتائج الممكنة للمجموعات A مع B مع C

Ω = {(خضر , لحم , جبن) , (فواكه , لحم, جبن) , (خضر , لحم , بيض) , (فواكه , لحم , بيض) , (خضر , لحم , لبن)

, (فواكه ,لحم , لبن) , (خضر ,دجاج , بيض) , (فواكه ,دجاج , بيض) , (خضر ,دجاج , لبن) ,

, (فواكه ,دجاج , لبن) , (خضر ,سمك , جبن) , (فواكه ,سمك , جبن) , (خضر ,سمك , بيض) ,

(فواكه ,سمك , بيض) , (خضر ,سمك , لبن) , (فواكه ,سمك , لبن) , (خضر ,لحم , بيض) , (فواكه , لحم, بيض)}

ii) العاب: تسابق محمد ومهند في لعبة القرص المجاور، دور القرص مرتين اذا كان مجموع

الرقمين عدد فردي فأن مهند هو الفائز



اكتب مجموعة النتائج الممكنة ليكون محمد هو الفائز.

$\Omega = \{(1,1) , (1,2) , (1,3) , (2,1) , (2,2) , (2 , 3) , (3 , 1) , (3 , 2) , (3 , 3)\}$

مجموع نتائج مهند $E = \{(1,2) , (2,1) , (2,3) , (3,2)\}$

مجموعة نتائج محمد $E = \{(1,1) , (1,3) , (2,2) , (3 ,1) , (3 ,3)\}$

اكتب : كيف تجد عدد النتائج الممكنة عندما ترمي حجر النرد مرة واحدة وقطعتي نقود معدنية دفعة واحدة؟

عند رمي قطعتي النقود دفعة واحدة فأن عدد نتائجها = 4

وعدد نتائج رمي حجر النرد مرة واحد = 6

لذلك عند رمي حجر النرد وقطعتي النقود دفعة واحدة فأن عدد النتائج

$6 \times 4 = 24$

الدرس الرابع / الحدث The Event

فكرة الدرس : يتعرف الى الحدث والاحداث المستقلة وغير المستقلة

التمييز بين الاحداث المستقلة وغير المستقلة

يتعرف الحدث الاكبر.

المفردات : الحدثان المستقلان، الحدثان المترابطان ، الحدث المركب.

واليك المثال التالي: تعلم:

صندوقان يحتوي الاول على كرات حمر وصفر يحتوي الصندوق الثاني كرات خضر وزرق سحبت كرة من كل صندوق:

- ماذا نسمي طريقة السحب؟
- ماذا نسمي النتائج؟
- وما العلاقة بين النتيجتين؟

يمكننا ان نسمي العملية في فقرة تعلم (تجربة Experiment)

اما الحدث Event: فهو مجموعة نتائج أو نتيجة واحدة احياناً. والاحداث قد تكون مستقلة او مترابطة او مركبة.

- الاحداث المستقلة والاحداث غير المستقلة (المترابطة)
Indepentent and Depentent Events

الحدثان المستقلين : اذا كان وقوع او عدم وقوع احدها لا يؤثر على وقوع الآخر او عدم وقوع الحدث الآخر.

الحدثان غير المستقلين (المترابطين): اذا كان وقوع او عدم وقوع احدهما يؤثر في وقوع او عدم وقوع الحدث الآخر.

مثال1 / الاجابة عن الاسئلة في فقرة تعلمنسمي طريقة السحب بالتجربة.

ونسمي النتائج من هذه التجربة بالاحداث.

اما العلاقة بين هذهِ الاحداث فتوضح كما يلي:

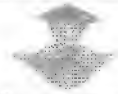
افرض أن E_1 حدث سحب كرة من الصندوق الاول (الكرة المسحوبة حمراء أو صفراء).

افرض أن E_2 حدث سحب كرة من الصندوق الثاني (الكرة المسحوبة خضراء او زرقاء)

لاحظ ان سحب اي كرة من الصندوق الاول لا يؤثر على عدد الكرات في الصندوق الثاني اي أن وقوع الحدث E_1 لا يؤثر على وقوع الحدث E_2 لذا E_1 , E_2 حدثان مستقلان.

مثال 2/ صندوق يحتوي على 3 كرات حمر و5 كرات صفراء.

حدد ما اذا كان الحدثان مستقلين ام مترابطين في كل مما يأتي:



أ) سحب كرة حمراء ثم سحب كرة صفراء دون اعادة الكرات الى الصندوق

افرض E_1 سحب كرة حمراء ، E_2 سحب كرة صفراء من الصندوق.

لعدم اعادة الكرة الحمراء بعد السحب بقى في الصندوق كرتان حمر و 4 كرات صفر.

اي وقوع الحدث E_1 يؤثر على وقوع الحدث E_2 فهما حدثان غير مستقلين (مترابطين)

ب) سحب كرة حمراء ثم سحب كرة صفراء بعد اعادة الكرة الاولى الى الصندوق

افرض E_1 سحب كرة حمراء ، E_2 سحب كرة صفراء بعد اعادة الكرة الحمراء يبقى عدد الكرات نفسه في الصندوق. اي وقوع الحدث E_1 لا يؤثر في وقوع الحدث E_2 فهما حدثان مستقلان.

مثال 3/ حدد ان كان الحدثان مستقلين او غير مستقلين في حالة ظهور الصورة بعد رمي قطعة نقود وظهور الكتابة بعد رميها مرة أخرى.

افرض E_1 ظهور الصورة في الرمية الاولى ، E_2 ظهور الكتابة في الرمية الثانية

E_1 لا يؤثر في E_2 لذا E_1 , E_2 حدثان مستقلان.

- الاحداث المركبة / Component Events

الحدث المركب: يتكون من حدثين بسيطين أو اكثر وقد تكون مستقلة او غير مستقلة.

مثال 4/ رمي حجر النرد وتدوير قرص مقسم على اجزاء ملونة متساوية المساحة هل الحدث مركب وما نوع الحدثان البسيطان؟

ان عملية رمي حجر النرد وتدوير القرص تعد حدثاً مركباً من حدثين بسيطين

الحدث الاول ظهور احد الارقام من 1 الى 6.

الحدث الثاني ظهور لون معين

ان ظهور رقم لا يؤثر على ظهور اللون لذلك فهما حدثان مستقلان.

مثال 5/ اعلن محل للملابس عن امكانية الحصول على قطعة اضافية عند شراء الزبون اي قطعة ما نوع الحدثين؟

تمثيل عملية شراء قطعة الملابس وتسلم قطعة ثانية مجاناً حدث مركب فتسلم القطعة الثانية مجاناً مرتبط بشراء الزبون القطعة الاولى.

لذلك فهما حدثان غير مستقلين.

تأكد من فهمك/ حدد ان كان الحدثان مستقلين او غير مستقلين في الاحداث المركبة فيما يأتي:

1) اسحب بطاقة من البطاقات المجاورة دون ارجاعها ثم اسحب بطاقة اخرى.

1	2	3	4	5	6

ليكن E_1 حدث سحب البطاقة الاولى دون ارجاعها.

ليكن E_2 حدث سحب البطاقة الثانية دون ارجاعها.

الحدث E_1 يؤثر على الحدثE_2 فهو حدث مركب لحدثين بسيطين غير مستقلين.

2) اذا اختيرت احدى بطاقات الاحرف ودوّر مؤشر القرص الدوار.



A	B	C	D

اذا تم اختيار احدى بطاقات الاحرف E_1

اذا تم تدوير مؤشر القرص سيقف على احد الاحرف E_2

هنا حدث مركب لكن E_2 لا يتوقف على E_1 فهما حدثان مستقلان.

3) رمي حجر النرد ، وسحب كرة من صندوق فيه كرات مختلفة الالوان

E_1 حدث رمي حجر النرد وظهور احد الارقام من 1 الى 6.

E_2 سحب كرة وظهور احدى الكرات ذات لون معين.

وقوع E_1 لا يؤثر على E_2 فهما حدثان مستقلان.

4) صندوق فيه 4 كرات حمراء و3 صفراء ، سحب مهند كرة عشوائياً وسحب محمد ايضاً كرة عشوائياً.

E_1 حدث سحب مهند كرة عشوائياً من احدى الالوان الموجودة

E_2 حدث سحب محمد كرة عشوائياً من احدى الالوان الموجودة.

وقوع E_1 يؤثر على وقوع E_2 (لأن احتمال مهند يريد سحب كرة ذات لون يكون محمد قد سحبها)

لذلك E_1 , E_2 حدثان غير مستقلين.

5) سحب الكرة الاولى من صندوق دون اعادتها ثم سحب كرة ثانية من الصندوق نفسه.

E_1 حدث سحب الكرة الاولى ، E_2 حدث سحب الكرة الثانية

عندما يسحب الكرة الاولى لا تعود للصندوق مرّة اخرى فيؤثر على سحب الكرة الثانية لذلك E_1 , E_2 حدثان غير مستقلان.



6) سحب الكرة الاولى من صندوق مع اعادتها ثم سحب كرة ثانية من الصندوق نفسه.

نفس الحل السابق لكن هنا عندما نسحب الكرة الاولى يتم اعادتها الى الصندوق ثم يتم السحب للكرة الثانية لذلك الحدثان مستقلين لأن E_1 لا يؤثر في وقوع E_2.

تدريب وحل التمارين/

حدد ان كان الحدثان مستقلين او غير مستقلين في الاحداث المركبة التالية:

7) وقوف المؤشر على اللون الاحمر وظهور الرقمين 5 , 2 على حجر النرد.

E_1 حدث وقوف المؤشر على اللون الاحمر E_2 حدث ظهور الرقمين 5 , 2 على حجر النرد.

وقوع E_1 لا يؤثر على حدث وقوع E_2 فهما حدثان مستقلان.

8) رمي حجري نرد معاً وظهور الرقم 6 على الحجر الاول وظهور الرقم 3 على الحجر الثاني.

E_1 حدث ظهور الرقم 6 على الحجر الاول وE_2 حدث ظهور الرقم 3 على الحجر الثاني

وقوع E_1 لا يؤثر على وقوع E_2 لذلك فهما حدثان مستقلان.

9) رمي قطعة نقود وظهور الصورة ورمي حجر نرد وظهور الرقم 5.

E_1 حدث ظهور الصورة E_2 حدث ظهور الرقم 5

وقوع E_1 لا يؤثر على وقوع E_2 لذلك فهما حدثان مستقلان.

10) رمي حجر النرد والحصول على عدد زوجي والحصول على 1 أو4.

E_1 حدث ظهور عدد زوجي و E_2 حدث ظهور العدد 1 أو 4 وبما العدد 4 عدد زوجي

لذلك E_2 يتأثر بوقوع الحدث E_1 اذا ظهر عليه العدد 4. فهما حدثان غير مستقلان.

11) علبة فيها حلوى بنكهات مختلفة ، 3 بطعم الليمون ، 4 بطعم الفراولة ، و2 بطعم الموز ، 5 بطعم البرتقال سحبت جمانة قطعتين من العلبة دون اعادتها الى العلبة.

ان سحب القطعة الاولى دون اعادتها يؤثر على سحب القطعة الثانية لذلك فالحدث غير مستقل.

12) رمى تيم قطعتي نقود في الوقت نفسه فإذا ظهرت الصورة نفسها على القطعتين

E_1 حدث ظهور صورة على القطعة الاولى و E_2 حدث ظهور صورة على القطعة الثانية.

E_1 لا تؤثر على وقوع E_2 فهما حدثان مستقلان.

13) اطلق محمد مؤشر القرص A واطلق مهند مؤشر القرص B في الوقت نفسه، أن يأتي مؤشر A على العدد 4 ومؤشر B على اللون الأخضر.

حدثان مستقلان

14) سحب بطاقة حمراء من مجموعة البطاقات D C B A وظهور كتابة بعد رمي قطعة نقود.

حدثان مستقلان. لا يتأثر وقوع احدهما بالآخر.

تدرب وحل مسائل حياتية:

15) فواكه: سلة تحتوي على 3 برتقالات و5 موزات و4 تفاحات.
اختار احمد حبة فاكهة عشوائياً واختارت اختهُ فاكهة عشوائياً دون اعادة الحبة الاولى ، ما العلاقة بين الحدثين؟

ليكن E_1 حدث اختيار احمد حبة فاكهة عشوائياً و E_2 حدث اختيار اختهُ حبة فاكهة عشوائياً دون اعادة الحبة الاولى.

لذلك عند سحب اي حبة من اي نوع من الفواكه يؤثر على سحب اختهُ وعليه E_2 يتأثر بوقوع E_1 فهما حدثان غير مستقلان.

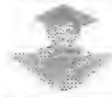
16) ملابس : دُرج فيه 5 قمصان بيض ، 4 زرق ، قميصان رصاصيان ، سحب شخص قميصاً من الدرج ، ثم سحب قميصاً آخر دون اعادة القميص الاول الى الدرج. أيكون الحدثان مستقلين ام لا؟ فسر اجابتك.

ليكن E_1 حدث سحب القميص الاول و E_2 حدث سحب القميص الثاني. الحدثان غير مستقلان.

17) لعبة: رمى احمد النرد وقطعة النقود مرة واحدة، ظهر رقم أكبر من 3 على حجر النرد وصورة على قطعة النقود هل الحدثان مستقلان؟ وضح ذلك.

ليكن E_1 حدث ظهور رقم اكبر من 3 على حجر النرد و E_2 حدث ظهور صورة على قطعة النقود

لكن ممكن ظهور رقم من الارقام 3 , 2 , 1 في الحدث E_1 او ظهور الكتابة في الحدث E_2 لذلك الحدثان مستقلان.



فكر:

18) مسألة مفتوحة: يوجد في صندوق 6 كرات بثلاثة الوان مختلفة، اكتب مسألة تتعلق بسحب كرتين عشوائياً دون ارجاعهما الى الصندوق.

في صندوق في كرة حمراء و3 كرات صفراء و1 كرة خضراء حيث سحب احمد عشوائياً كرة دون ارجاعها الى الصندوق ثم قام علي بسحب كرة ثانية عشوائياً من الصندوق أيكون الحدثان مستقلان ام لا عندما تكون الكرتان من نفس اللون؟

(يترك حلها للطالب)

19) اكتشف الخطأ ثم صححه: اطلق محمود مؤشر القرص المجاور ثلاث مرات وقال ان يأتي المؤشر على الرقم 5 في المرات الثلاثة لا يؤثر في النتيجة وقال: صالح ان يأتي المؤشر على الرقم 5 في المرات الثلاثة يؤثر في النتيجة ايهما اجابتـه صحيحة؟ فسر اجابتك.

طبعاً جواب محمود فيه خطأ لأن أحتمال ان يحجز الرقم 5 في الاطلاق الاول وعليه جواب صالح صحيح يؤثر في النتيجة.

20) طقس : توقعت دائرة الانواء الجوية ان هناك فرصة تساقط مطر يوم الثلاثاء 80% ان فرصة هطول المطر يوم الاربعاء هي 30% ما العلاقة بين الحدثين؟

اذا سقط المطر يوم الثلاثاء يحتمل ان لا يسقط يوم الاربعاء

واذا لم يسقط المطر يوم الثلاثاء يحتمل ان يسقط يوم الاربعاء

واذا حدث وان سقط يوم الثلاثاء والاربعاء جائز وممكن جداً.

لذلك العلاقة هي حدث مركب والحدثين غير مستقلان.

اكتب: ما الفرق بين الحدثين المستقلين وغير المستقلين؟

الحدثين المستقلين هما حدثان يقعان دون ان يتأثر احدهما بالآخر.

اما الحدثين غير المستقلين هما حدثان يتأثر احدهما بوقوع الآخر.

الدرس الخامس / الاحتمالات The Probabilities

فكرة الدرس: **حساب احتمال وحساب احتمال الحدث المتمم.**

المفردات: **احتمال الحدث ، الحدث المتمم.**

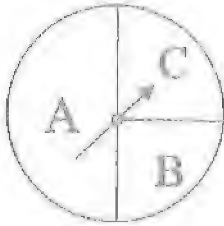
اليك المثال التالي: تعلم

اخذ مهند القرص الدوار المجاور ، اذا دور مؤشر القرص الدوار فما احتمال ان يؤشر المؤشر على كل حرف؟

الاحتمالية Probability

احتمال الحدث E : هو قياس فرص حدوثه بالتحقيق ويكتب احتمال الحدث E بصورة P (E)

ويمكن التعبير عنهُ بكسر عشري يقع بين 1 ، 0 او كسر أو نسبة مئوية



فأذا كان P (E) = 0 فالحدث مستحيل واذا كان P (E) = 1 فالحدث مؤكد.

يمكن ان نجد احتمال حدوث الحدث E باستعمال العلاقة الآتية $P(E) = \frac{m}{n}$

اذ ان m عدد النتائج التي يحققها الحدث E.

n عدد النتائج التي تقع كلها في التجربة الواحدة.

مثال 1/ في فقرة تعلم

الطريقة الاولى: بما أن الحرف A يمثل نصف القرص فأن التقدير المعقول لأن يأتي المؤشر على الحرف A هو $P(A) = \frac{1}{2}$

وبما أن الحرفان B ,C كل منهما يمثل ربع القرص.

فأن التقدير لأن يأتي على الحرف B او الحرف C هو: $P(C) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{4}$

الطريقة الثانية: من الشكل يلاحظ انهُ متكون من 4 ارباع اي ان n = 4

الجزء A يمثل ربعين اي ان m = 2 لذلك $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

الجزء B أو C من القرص يمثل ربعاً واحداً اي ان m = 1 لذلك

$$P(B) = P(C) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$



مثال 2/ صندوق فيه 10 بطاقات خضراء و3 بطاقات بيضاء ، سحبت جمانة بطاقة خضراء من دون ارجاعها الى الصندوق ، ثم سحبت اختها سالي بطاقة بيضاء. ما احتمال السحب لكل منهما؟

يحتوي الصندوق على 10 بطاقات خضراء + 3 بطاقات بيضاء اي 13 بطاقة.

فأن احتمال سحب جمانة بطاقة خضراء هو: $P\left(\text{خضراء}\right)=\frac{\text{عدد البطاقات الخضراء}}{\text{العدد الكلي للبطاقات}}=\frac{10}{13}$

لأن البطاقة المسحوبة لم ترجع الى الصندوق ، هذا يعني ان في الصندوق الآن 12 بطاقة

احتمال سحب بطاقة بيضاء هو: $P\left(\text{بيضاء}\right)=\frac{\text{عدد البطاقات البيضاء}}{\text{العدد الكلي للبطاقات}}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

- الحدث المتمم: Complement Event

الحدث المتمم يعني: يقال للحدثين E_1 ، E_2 متتمان اذا كانت نتائج كل الحدث E_1 لا تحقق نتائج الحدث E_2 ، فـأذا كـان احتمـال حـدوثهما $P(E_1), P(E_2)$ فـأن: $P(E_1)+P(E_2)=1$ اي الحـدثين E_1 ، E_2 مستقلان.

مثال 3/ $E1$ ، $E2$ حدثان متتامان اذا كان $P(E_2)=\frac{2}{5}$ فجد $P(E_1)$ ثم اكتبه بوصفه نسبة مئوية وكسراً عشرياً.

بما أن E_1 ، E_2 حدثان متتامان فأن

$$P(E_1)+p(E_2)=1$$

$$P(E_1)+\frac{2}{5}=1\rightarrow P(E_1)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

كتابة نسبة مئوية نجعل مقام الكسر 100 $P(E_1)=\frac{3}{5}\times\frac{20}{20}=\frac{60}{100}=60\%$

كتابة كسر عشري نجعل مقام الكسر 10 $P(E_1)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{2}=\frac{6}{10}=0.6$

مثال 4 / سلة فيها 3 كرات زرق، 7 كرات حمر ، سحبت كرة عشوائيا احتمال ان تكون الكرة زرقاء هو $\frac{3}{10}$ ما احتمال ان تكون الكرة المسحوبة غير زرقاء؟

افرض ان $P(E_1) = \frac{3}{10}$ احتمال الكرة زرقاء

افرض ان $P(E_2)$ احتمال الكرة المسحوبة ليست زرقاء

الحدثان متتامان اي ان:

$$P(E_1) + P(E_2) = 1$$

$$\frac{3}{10} + P(E_2) = 1$$

$$P(E_2) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} = 70\%$$

لذا احتمال ان تكون الكرة المسحوبة غير زرقاء هو $\frac{7}{10}$ او 0.7 او 70%.

تأكد من فهمك /

لدينا البطاقات المجاورة | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | جد احتمال ما يأتي:

1) البطاقة تحمل رقم زوجي

الحدث E_1 تحمل الارقام 2 ، 4 ، 6 ، 8 وعدد البطاقات 8

$$P(E_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5 = 50\%$$

2) البطاقة تحمل رقم اولي:

E_2 حدث المجموعة تحمل الارقام غير الاولية وهي {2 , 3 , 5 , 7 } فأن

$$P(E_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

3) البطاقة تحمل رقم يقبل القسمة على 5

E_3 حدث المجموعة التي ارقامها تحمل الرقم الذي يقبل القسمة على 5 وهي {5}.

$$P(E_2) = \frac{1}{8} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{8}{2}} = \frac{0.5}{4} = \frac{0.5 \times 25}{4 \times 25} = \frac{12.5}{100} = 12.5\% = 0.125$$



في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة اكتب احتمال:

4) ظهور عدد يقبل القسمة على 3:

E_1 حدث ظهور عدد يقبل القسمة على 3 وهي المجموعة {6 , 3} عددها 2

$$P(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.33 = 33\%$$

5) ظهور العدد 7: وبما ان 7 لا يوجد في النرد الاحتمال مستحيل لذلك $P(7) = 0$

6) ظهور الاعداد المحصورة بين 2 ، 6 : وهي 3 ، 4 ، 5

الحدث E_2 = {5 , 4 , 3} لذلك $P(E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

7) اذا كان احتمال ظهور عدد فردي في رمي حجر النرد مرة واحدة هو $\frac{1}{2}$ فما احتمال ظهور عدد زوجي؟

بما أن مجموعة الارقام على حجر النرد {6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1} والحدث $E = \{1 , 2 , 3\}$

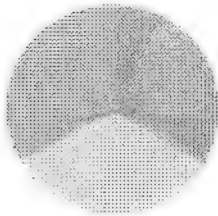
ولذلك:
$$P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

8) اذا كانت الاحداث E1 ، E2 ، E3 متنامات وكان $P(E_1) = \frac{2}{3}$ ، $P(E_3) = \frac{1}{4}$ فما قيمة $P(E_2)$؟

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1 \rightarrow \frac{2}{3} + P(E_2) + \frac{1}{4} = 1$$

$$P(E_2) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12-8-3}{12} = \frac{1}{12} = 8\%$$

9) استعمل القرص المجاور وجد احتمال كل نتيجة ممكنة ثم تحقق



النتيجة	أصفر	اخضر	ازرق
الاحتمال	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

تدرب وحلّ التمرينات /

سلة تحتوي على 10 كرات حمراء ما احتمال سحب:

10) كرة حمراء واحدة؟ $P\left(\text{حمراء}\right) = \frac{10}{10} = \frac{010}{100} = 100\%$

11) كرة غير حمراء: لا يوجد كرات حمراء لذلك الحدث مستحيل $P\left(\text{غير حمراء}\right) = 0$

12) ثلاث كرات حمراء؟ $P\left(\text{كرات حمراء}\right) = \frac{10}{10} = 100\%$

13) كرات تحمل الاعداد من 1 الى 20 ، اذا كان E1 ليس من مضاعفات العدد 4 جد E2 الذي يمثل مضاعفات العدد 4 بطريقتين:

$E_2 = \{4, 8, 12, 16, 20\}$,

$E_1 = (1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19\}$

$$P(E_1) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0.75 = 75\%$$

$$P(E_2) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

يبين الجدول احتمال ظهور رقم بعد رمي حجر النرد، جد ناتج احتمال كل حدث:

14) ظهور عدد يقبل القسمة على 3.

وليكن الحدث $E_1 = \{3, 6\}$

$P(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.33 = 33\%$ تقريباً

أو $P(E_1) = P(3) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

15) ظهور عدد أصغر من 4.

وليكن الحدث $E_2 = \{1, 2, 3\}$

$$P(E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

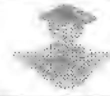
أو $P(E_2) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 3/6$

16) ظهور العدد 6.

وليكن الحدث $E_3 = \{6\}$ لذلك $P(E_3) = 1/6$

أو $P(6) = \frac{1}{6}$

الحدث	6	5	4	3	2	1
الاحتمال	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



17) ظهور الاعداد بين 3 و 6

$E = \{4 ، 5\}$

$P_E = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 33\%$

تدرب وحل مسائل حياتية /

18) لعبة: تريد تمارة الجلوس على كرسي بين 8 كراسي مرقمة من 1 الى 8 . ما احتمال جلوس تمارة على كرسي يحمل عدد زوجي؟

حيث E_1 الاعداد الزوجية هي 8 , 6 , 4 , 2 لذلك $P(E_1) = \frac{4}{8} = 0.5 = 50\%$

19) مواصلات: ينتظر مهند الباص بين باصات تحمل الارقام من 1 الى 5 ما احتمال ركوب مهند باصاً يحمل رقم اصغر من 4؟

E_1 حدث الارقام الاصغر من 4 وهي 3 , 2 , 1 لذلك $P(E_1) = \frac{3}{5} = \frac{3\times20}{5\times20} = \frac{60}{100} = 60\%$

20) حجر نرد: رمي حجر نرد مرة واحدة ما احتمال ظهور عدد غير 6؟

E1 حدث ظهور عدد غير 6 وهي الاعداد 5 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1 لذلك $P(E_1) = \frac{5}{6} - 83\%$

21) كيس فيه 8 خرزات صفراء ، 3 خرزات بيض ، 5 خرزات زرق ، اذا سحبت بشكل عشوائي خرزة من الكيس, ما احتمال ان تكون الخرزة المسحوبة زرقاء اللون؟

$8 + 3 + 5 = 16$ عدد الخرز $\rightarrow P(\text{زرقاء}) = \frac{5}{16}$

22) ما احتمال ان تكون الخرزة المسحوبة صفراء اللون؟

$$P(\text{صفراء}) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 50\%$$

23) ما احتمال ان تكون الخرزة المسحوبة غير بيضاء اللون؟ بطريقتين

$$P(\text{صفراء}) + P(\text{زرقاء}) = \frac{5}{16} + \frac{8}{16} = \frac{13}{16}$$

24) رياضة: توقع مدرب ان يفوز فريقهُ في مباراة كرة القدم بنسبة 85% اكتب ككسر في ابسط صورة احتمال خسارة فريقه؟

$$85\% = \frac{85}{100} = \frac{17}{20}$$

$$P(\text{الفوز}) + P(\text{الخسارة}) = 1$$

$$\frac{17}{20} + P(\text{الخسارة}) = 1 \rightarrow P(\text{الخسارة}) = 1 - \frac{17}{20} = \frac{3}{20} = 15\%$$

25) طقس: تتوقع شهد ان يوم غداً صحو هو 25% ، جد بشكل كسر احتمال كل نتيجة فيما يأتي:

النتيجة	صحو	غائم
الاحتمال	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

$P_{(صحو)} + P_{(غائم)} = 1$

$P_{(غائم)} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

فكر

26) تفكير ناقد: اخبرت بأمكانية وقوع 4 أحداث فقط، احتمال الحدث الاول $\frac{1}{4}$ واحتمال الحدث الثاني $\frac{1}{5}$ واحتمال الحدث الثالث والرابع متساويين فما احتمال الحدث الرابع؟

$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) = 1$ $\quad\quad P(E_3) = P(E_4)$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + 2P(E4) = 1 \rightarrow 2P(E_4) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{11}{20} \rightarrow P(E_4) = \frac{11}{40}$

27) فواكه: يوجد في سلة 4 برتقالات، سحبت برتقالتين احداهما بعد الاخرى دون اعادة البرتقالة الاولى والثانية ، فما احتمال كل الحدث؟

$P(E_1) = \frac{4}{4} = 1$

$P(E_2) = \frac{3}{3} = 1$

$P(E_1) \times P(E_2) = 1 \times 1 = 1$

28) أكتشف الخطأ: دوّر القرص ادناه مرتين، احتمال أن يقف المؤشر على عدد فردي في المرة الاولى $\frac{3}{5}$ وفي المرة الثانية $\frac{2}{4}$ ايهما اصح؟

الاعداد الفردية هي 5 , 3 , 1 لذلك

E_1 حدث ان يقف المؤشر على عدد فردي $\quad P(E_1) = \frac{3}{5}$

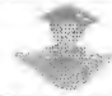
29) تحد: اكتب كل الاحداث الممكنة في فضاء عينة تتألف من 3 نتائج A , B , C

$P(A) = \frac{1}{3} \quad , P(B) = \frac{1}{3} \quad , P(C) = \frac{1}{3}$

اكتب: مثالاً على حدث احتمالهُ صفر وآخر احتمالهُ واحد.

في مدرسة للبنين ما احتمال ان تدرس 10 طالبات في المدرسة $P(10) = 0$

وما احتمال ان يكون كل الطلاب من البنين $1 = P\left(\text{الطلاب}\right)$



الدرس السادس / الاحتمالات التجريبي والاحتمال النظري
Experimental Probability and Theoretical Probability

فكرة الدرس: **يحسب الاحتمال النظري . يحسب الاحتمال التجريبي**

المفردات : **الاحتمال النظري ، الاحتمال التجريبي ، فضاء العينة**

واليك المثال التالي: تعلم

يتدرب لاعب كرة القدم على تحسين أدائهِ في تسجيل اهداف في ضربات الجزاء، فقد سجل 20 هدفاً من 25 ضربة جزاء. نلاحظ من هذين العددين انهُ سجل اهداف اكثر مما يخطئها، كيف يمكنك ان تقدر احتمال اصابة الهدف في الضربة المقبلة.

حدد الاحتمال في فقرة تعلم عن طريق اجراء التجربة وتسمى الاحتمالات التجريبية ، اما الاحتمالات النظرية فأنها تزودنا بنتائج التجربة دون الحاجة الى اجرائها فيكون:

الاحتمال التجريبي: **فيه تقدر أرجحية الحدث بتكرار تجربة مرات عدة، ثم عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث.**

$$\text{الاحتمال التجريبي} \approx \frac{\text{عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث}}{\text{العدد الكلي للتجارب}}$$

الاحتمال النظري : **يستعمل لتقدير احتمالات الحدث باستعمال قوانين العد دون اللجوء الى تكرار التجربة ، وعندما تكون كل النتائج الممكنة متساوية في احتمال حدوثها**

$$\text{الاحتمال النظري} = \frac{\text{عدد النتائج التي تحقق فيها الحدث}}{\text{عدد النتائج الممكنة كلها (عدد عناصر فضاء العينة)}}$$

مثال 1/ في فقرة تعلم احتمال اصابة الهدف في الضربة المقبلة $\frac{20}{25}$ اي $\frac{4}{5}$

(اي عدد الاهداف التي سجلها من مجموع الاهداف الكلية)

مثال 2/ بعد اطلاق مؤشر القرص 20 مرة سجلت النتائج في الجدول ادناه:

النتيجة	C	B	A
عدد الاصابات	5	5	10

i) هل هذا الاحتمال نظري ام تجريبي؟

هذا الاحتمال تجريبي لا انه يعتمد على تكرار التجربة (20 مرة)

ii) جد احتمال ان يأتي المؤشر على الحرف A.

$$\text{الاحتمال التجريبي} \approx \frac{\text{عدد المرات التي اصيب الحرف } A}{\text{العدد الكلي للتجربة}}$$

$$P(A) \approx \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

لذا الاحتمال التقريبي بأن يأتي المؤشر على الحرف A هو $\frac{1}{2}$ أو 0.5 أو 50%

مثال 3/ سحب محمد كرة من صندوق يحتوي على 50 كرة، 20 كرة حمراء ، 17 كرة بيضاء ، 13 كرة صفراء.

i) هل هو احتمال نظري أم تجريبي؟

ii) جد احتمال كون الكرة المسحوبة صفراء؟

الاحتمال نظري ، لأن كل النتائج متساوية في احتمال حدوثها، ثم لا توجد حاجة لتكرار التجربة.

عدد عناصر فضاء العينة 50 (عدد الكرات في الصندوق)

$$\text{الاحتمال النظري} = \frac{\text{عدد النتائج التي تحقق فيها الحدث}}{\text{عدد النتائج الممكنة كلها}\left(\text{عدد عناصر فضاء العينة}\right)}$$

احتمال سحب كرة صفراء هو: $\frac{13}{50} = \frac{\text{عدد الكرات الصفراء}}{\text{عدد الكرات الكلي}} = P(A)$

نعوض عن عدد الكرات الصفراء 13 وعدد الكرات كلها 50.

لذا احتمال سحب كرة صفراء هو $\frac{13}{50}$ أو 0.26 أو 26%

النسبة المئوية أن تجعل المقام 100. كذلك الكسر العشري أن تجعل المقام 10 أو 100 أو 1000 ..

مثال 4/ استعمل الجدول المجاور الذي يبين نتائج رمي قطعتي نقود 8 مرات واجب عما يأتي:

i) ما الاحتمال النظري للحصول على صورتين؟

ii) ما الاحتمال التجريبي للحصول على صورتين؟

التكرار	النتائج
3	H , H
2	H , T
1	T , H
2	T , T

فضاء العينة لرمي قطعتي نقود مرة واحدة هو:

$$\{(H , H) , (H ,T) , (T , H) , (T , T)\}$$

عدد عناصر فضاء العينة = 4

i) عدد مرات ظهور (H , H) هي مرّة واحدة عند رمي قطعتي النقود.

$$P(H,H) = \frac{\text{عدد ظهور } (H,H)}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}} = \frac{1}{4}$$

اذن الاحتمال النظري $= \frac{1}{4}$ أو 0.25 أو 25%



ii) عدد مرات ظهور (H , H) هو 3 مرات عند رمي قطعتي النقود ثماني مرات.

$$P(H,H) = \frac{\text{عدد ظهور } (H,H)}{\text{العدد الكلي للتجربة}} = \frac{3}{8}$$

لذا الاحتمال التجريبي $\approx \frac{3}{8} = 0.375 = 37.5\%$

تأكد من فهمك:

1) سحبت كرة عشوائياً من صندوق ثم اعيدت اليه، يبين الجدول التالي النتائج بعد 50 سحبة، قدر احتمال سحب كرة حمراء ، ما نوع الاحتمال؟

النتيجة	اخضر	احمر	اصفر	ازرق
السحوبات	5	13	12	20

عدد السحوبات = 5 + 13 + 12 + 20 = 50

والأحتمال تجريبي : A الكرات الحمراء

وعددها 13 $P(A) = \frac{13}{50}$

رميت حجر النرد مرة واحدة ،جد.

2) احتمال أن يكون العدد الذي يظهر اكبر من 2.

الاعداد الاكبر من 2 هي 3 ، 4 ، 5 ، 6 $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

وفضاء العينة {6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1} وعدد عناصرها 6

3) احتمال الحصول على عدد زوجي .

الاعداد الزوجية هي 6 , 4 , 2 وعددها (3) $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

4) احتمال الحصول على عدد اولي.

الاعداد الاولية هي 5 , 3 , 2 $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

5) احتمال الحصول على عدد يقبل القسمة على 6. $P(A) = \frac{1}{6}$

6) ما نوع الاحتمالات السابقة نظرية أم تجريبية. **الاحتمالات نظرية**

7) في لعبة كرة السلة اصاب لاعب السلة 15 مرّة من 25 رمية، ما الاحتمال لأن يصيب اللاعب السلة في الرمية التالية؟ وما نوع الاحتمال؟ اكتب الاحتمال بالكسر العشري والاعتيادي والنسبة المئوية؟

احتمال اصابة السلة هو $\frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0.6 = 60\%$ ونوع الاحتمال تجريبي.

تدرب وحل التمرينات /

رميت حجر النرد مرة واحدة.

8) احتمال ان يكون العدد فردي. الاعداد الفردية هي 5 , 3 , 1 وعدد عناصر فضاء العينة هي 6.

والاحتمال النظري $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0.5=50\%$

9) احتمال الحصول على عدد غير اولي. الاعداد غير الاولية هي 6 , 4 وعدد عناصر فضاء العينة 6

والاحتمال النظري $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.33=33\%$

10) احتمال الحصول على عدد يقبل القسمة على 4 يوجد عدد يقبل القسمة على 4 وهو رقم 4

لذلك هناك احتمال واحد $\frac{1}{6}$

11) ما نوع الاحتمالات السابقة نظرية أم تجريبية.

الاحتمالات نظرية

12) سحب مهند قرص من علبة تحتوي على 3 أقراص حمراء ، 4 كرات صفراء ، 4 أقراص سود ما احتمال ان يكون القرص المسحوب اصفر.

عدد عناصر فضاء العينة هو: 3 + 4 + 4 = 11

$P(A)=\frac{4}{11}$

13) اراد شخص احصاء انواع السيارات عند احد التقاطعات من بين 20 سيارة شاهدها احصى 5 شاحنات ، 3 سيارات رياضية ، 12 سيارة صالون ، ما احتمال ان تكون السيارة التالية شاحنة.

انواع السيارات	التكرار
شاحنات	5
رياضية	3
صالون	12
مجموع التكرارات	20

عدد عناصر فضاء العينة 20 = 12 + 3 + 5

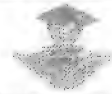
$P(A)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}=0.25=25\%$

في الصف لحصة الرياضة، 6 طلاب لكرة سلة ، 8 طلاب لكرة القدم. يختار المدرس بشكل عشوائي احد الطلاب ، جد احتمال:

14) ان يختار طالب من الصف ليلعب في فريق كرة السلة.

عدد عناصر فضاء العينة 6 + 8 = 14

$P(A)=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$



15) ان يختار طالب من الصف ليلعب في فريق كرة القدم

$$P(A) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

تدرب وحل مسائل حياتية /

16) زراعة: لدى طارق كيس فيه 120 بذرة زهور حمر وصفر فاذا كان 30% بذور زهور صفر نشر طارق البذور في حديقتة. بعد اسبوعين لاحظ ظهور اول الازهار ، ما احتمال ان تكون النبتة الحمراء.

$\frac{30}{100} \times 120 = 36$ عدد البذور الصفراء

$120 - 36 = 84$ عدد البذور الحمراء

$P(R) = \frac{84}{120} = \frac{7}{10} = \frac{70}{100} = 70\%$ احتمال ان تكون النبتة حمراء

17) رياضة: في تدريب على كرة السلة ، اصاب محمد السلة 13 مرة من 30 رمية. ما احتمال ان يصيب محمد السلة في الرمية التالية؟ وما نوع الاحتمال؟

$P(A) = \frac{13}{30}$ الاحتمال تجريبي

18) وقت: اجريت دراسة على 250 شخص للوقف على طريقة معرفتهم الوقت استعمل الجدول المجاور وجد احتمال ان يستعمل الشخص هاتفة المحول في ذلك.

الاسلوب	عدد الاشخاص
ساعة يد	75
ساعة حائط	30
ساعة هاتف	145

$P\left(\text{ساعة يد}\right) = \frac{75}{250} = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = 30\%$ احتمال ساعة يد

$P\left(\text{ساعة حائط}\right) = \frac{30}{250} = \frac{3}{25} = \frac{3 \times 4}{25 \times 4} = \frac{12}{100} = 12\%$ ساعة حائط

$P\left(\text{ساعة هاتف}\right) = \frac{145}{250} = \frac{29}{50} = \frac{58}{100} = 58\%$ ساعة هاتف

لذلك احتمال ان يستعمل الشخص هاتفه المحمول هي 58%

17) طقس: يمثل الجدول ادناه درجات الحرارة خلال اسبوع في احد فصول السنة

اليوم	السبت	الاحد	الاثنين	الثلاثاء	الاربعاء	الخميس	الجمعة
درجات الحرارة	15	29	25	21	16	18	20

ما احتمال ان تكون درجة الحرارة اقل من 20 في اليوم التالي؟ بين نوع الاحتمال.

تكون درجة الحرارة اقل من 20 في ايام السبت والثلاثاء والاربعاء والخميس.

اي 4 ايام فقط في 7 ايام لذلك $P\left(\text{اقل من } 20\right) = \frac{4}{7} = 0.57 = 57\%$

اذ احتمال ان الحرارة اقل من 20 هو 57% والاحتمال نظري.

18) مطعم: دخل 10 اشخاص احد مطاعم الكباب، 6 منهم طلبوا كباب ، ما الاحتمال التجريبي في ان لا يطلب الشخص التالي كباباً؟

$10 - 6 = 4$ عدد الذين لم يطلبوا كباباً

$$P(A) \approx \frac{4}{10} \approx 40\%$$

فكر:

19) مسألة مفتوحة: اجريت دراسة احصائية على 30 شخصاً عن لونهم المفضل من الالوان (الازرق ، الاحمر ، الاخضر ، الابيض) اعمل جدولاً لكل النتائج الممكنة اذا كان $\frac{2}{5}$ هو الاحتمال التجريبي لأن يكون اللون المفضل هو اللون الازرق.

اللون	الاحتمال
ازرق	%40
احمر	%20
اخضر	%20
ابيض	%20

$P\left(\text{ازرق}\right) \approx \frac{2}{5} = \%40$

باقي الالوان $\approx 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$P\left(\text{احمر}\right) \approx P\left(\text{اخضر}\right) \approx P\left(\text{ابيض}\right) \approx \frac{1}{5} = \%20$

20) تحدٍ: وجدت دراسة احصائية ان 75 طالب من اصل 200 لديهم حذاء اسود وان 280 طالباً من اصل 400 لديهم جواريب بيض. فما احتمال ان يكون لدى الطالب حذاء اسود وجواريب بيض معاً؟

$P\left(\text{حذاء}\right) = \frac{75}{200} = \frac{3}{8}$

$P\left(\text{جواريب}\right) = \frac{280}{400} = \frac{7}{10}$

$P\left(\text{حذاء وجواريب}\right) = \frac{3}{8} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{80} = \%26.2$



21) أكتشف الخطأ: كيس فيه خمس كرات صفر ، 7 كرات بيض، كم كرة صفراء تضاف الى الكيس ليكون احتمال سحب كرة بيضاء هو $\frac{1}{2}$ ، فقالت جمانة تضيف 6 كرات صفر وقالت أختها سالي نضيف كرتين صفراويتين، أيهما جوابها صحيح؟

لو اضفنا 6 كرات صفراء تصبح عدد الكرات 11 صفراء و7 بيضاء ومجموعهما 18 لذلك احتمال سحب كرة بيضاء $P\left(\text{بيضاء}\right)=\frac{7}{18}$

وهذا جواب لا يطابق السؤال لذلك جواب جمانة خطأ.

لو اضفنا كرتين صفراء تصبح عدد الكرات 7 صفراء و7 بيضاء ومجموعهما 14 لذلك احتمال سحب كرة بيضاء $P\left(\text{بيضاء}\right)=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$

لذلك جواب سالي صحيح.

اكتب: مسألة عن تجربة شاهدتها أو عشتها تتضمن سؤالاً عن الاحتمال التجريبي.

عند رمي قطعتي نقود معدنية معاً مرتين فما هو احتمال ان تظهر لديك صورة على الاقل؟

الدرس السابع / خطة حل المسألة (تمثيل المسألة)

فكرة الدرس: **أحل المسألة باستعمال (تمثيل المسألة)**

اليك المثال التالي: تعلم

طول ملعب 100 متر ، فأذا ركض محمد 25 متراً الى الامام و5 امتار الى الخلف فبكم مرة عليه ان يكرر العملية حتى يصل الى نهاية الملعب.

أفهم : **ما معطيات المسألة؟ ملعب طوله 100 متر. يركض محمد الى الامام 25 متر ويرجع 5 امتار الى الخلف.**

ما المطلوب من المسألة ؟ كم مرّة عليه ان يكرر العملية حتى يصل الى نهاية الملعب.

خطط: كيف تحل المسألة؟ **أمثل المسألة على مستقيم الاعداد**

حل: **أرسم مستقيم الاعداد واقسمهُ على اقسام مناسبة الطول.**



25 متر للإمام ، 5 أمتار للخلف

اي في كل مرة يقطع $25-5=20\ m$

العدد الكلي للمرات $100\div 20=5$

تحقق : تأكد من صحة حلك: نضرب طول المسافة التي يقطعها في كل مرة في 5.

$20 \times 5 = 100\ m$

مسائل:

1) اشترى احمد كتاب بمبلغ 25 الف و500 دينار فإذا دفع احمد 30 الف دينار فكم يمكن ان يسترد الباقي اذا كان لدى البائع قطع نقدية من الفئتين 1000 دينار و500 دينار

دينار يجب ان يسترد $30000 - 25500 = 4500$

اما 4 قطع نقدية من فئة 1000 دينار وقطعة من فئة 500 دينار.

أو 9 قطع نقدية من فئة 500 دينار.

التحقق : دينار $1000 \times 4 + 500 = 4000 + 500 = 4500$

أو دينار $500 \times 9 = 4500$

2) يركض لاعب في كل مرة 8 m ثم يتراجع 2 متر فـأذا كانـت المسافـة الواجـب قطعهـا 60 m . فكم مرّة يكرر الركض ليقطع المسافة كاملة؟

شبيه المثال السابق:

في كل مرة يقطع $8 - 2 = 6\ m$

العدد الكلي للمرات $60 \div 6 = 10$

التحقق: المسافة $10 \times 6 = 60$

3) ارادت جمانة ان ترتب خمس كتب لديها على الـرف، بحيـث يكـون كتابـة الرياضيـات أولها وكتاب اللغة العربية في آخرها فبكم طريقة يمكن ترتيب الكتب الخمسة على الرف؟

بما أن الرياضيات واللغة العربية مواقعهما ثابتة أذن عدد الكتب التي يراد ترتيبها 3=2-5

عدد ترتيبات التي ممكن ان ترتب بها الكتب $3 \times 2 = 6$

4) يقف مهند ومحمد واحمد ومحمود في خط مستقيم فبكم طريقة يمكن ترتيبهم؟

كل ولد يمكن ان يغير ترتيبه 3 مرات لذلك توجد طريقة $12 = 3 \times 4$ للترتيب

5) في اختبار الرياضيات طريقة اعتمد القاء قطعة معدنية لك (5) اسئلة من نوع الخطأ والصواب هل هذه الطريقة جيدة للحصول على درجة جيدة في الاختبار؟

كلا لأن هذه الطريقة فيها احتمال %50 صح أو خطأ.



مراجعة الفصل السابع Chapter 7 Review

المفردات : تحفظ من صفحة 92 من الكتاب لأهميتها.

الدرس الاول: مقياس النزعة المركزية والمدى

مثال/ الجدول التالي يبين معدل درجات الحرارة الشهري لكل مدينتي بغداد والقاهرة.

بغداد	17	34	22	25	9	34	8	11	23
القاهرة	27	19	14	21	14	17	24	22	24

مثل البيانات بالساق والورقة

بغداد	الساق	القاهرة
8 9	0	
1 7	1	9 7 4 4
2 3 5	2	7 4 2 1
4 4	3	

تدريب / الجدول التالي بيانات مجموعتين A , B.

A	10	26	36	20	14	22	36
B	25	19	14	21	14	17	24

i) مثل البيانات بالساق والورقة

B	الساق	A
4 4 7 9	1	40
1 4 5	2	620
	3	66

ii) اي المجموعتين مداها اكبر.

$36 - 10 = 26$ مجموعة A

$25 - 14 = 11$ مجموعة B

الدرس الثاني: تمثيل البيانات ببيان الشاربين

مثال / استعمل البيانات التالية لتمثيلها ببيان الشاربين.

7 , 20 , 20 , 18 , 17 , 14 , 10 , 17 , 16

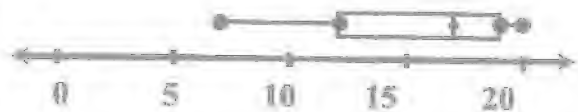
الترتيب:

7 , 10,14 , 16 , 17, 17 , 18,20 , 20

الوسيط = 17 الربيع الادنى = $\frac{10+14}{2} = 12$

الربيع الاعلى= $\frac{18+20}{2} = 19$

القيمة الكبرى = 20 القيمة الصغرى = 7



تدريب/ استعمل البيانات التالية لتمثيلها ببيان الشاربين. ثم جد:

87,80,90,90,87,82,80,90,90,85

الترتيب:

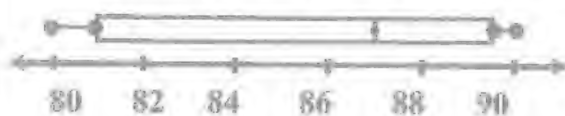
80 , 80 , 82 , 85, 87 , 87, 90 , 90,90, 90

الوسيط = $\frac{87+87}{2} = 87$

الربيع الادنى = $\frac{80+82}{2} = 81$

الربيع الأعلى = $\frac{90+90}{2} = 90$

القيمة الكبرى = 90 القيمة الصغرى = 80



	i) المدى لهذه المعطيات المدى الربيعي = 90 − 81 = 9 المدى = 90 − 80 = 10 ii) جد الربيع الادنى = 81 والربيع الاعلى = 90 iii) الوسيط = 87

الدرس الثالث: التجربة العشوائية

مثال : أرم قطعة نقود واطلق مؤشر القرص المقابل ، اكتب مجموعة النتائج الممكنة باستعمال مخطط الشجرة وجد عددها.

H ← 1 : (H , 1)
H ← 2 : (H , 2)
H ← 3 : (H , 3)

T ← 1 : (T , 1)
T ← 2 : (T , 2)
T ← 3 : (T , 3)

مجموعة النتائج هي:

{(H,1) ,(H,2) , (H,3), (T,1),(T,2) ,(T,3) }

عددها $2 \times 3 = 6$

تدريب 1/ يبيع أحد المحلات المثلجات في علب صغيرة ومتوسطة، يمكن للزبون اختيار مثلجات بطعم الفانيلا او الشوكلاته او الفستق اكتب مجموعة النتائج الممكنة امام الزبون.

علبة صغيرة:
- فانيلا ← (فانيلا ، ص)
- شوكولاته ← (شوكو ، ص)
- فستق ← (فستق ، ص)

علبة متوسطة:
- فانيلا ← (فانيلا ، م)
- شوكولاته ← (شوكو ، م)
- فستق ← (فستق ، م)

لذلك مجموعة النتائج الممكنة =

{(فانيلا , ص),(شوكولاته, ص),(فستق ,ص) ,

(فانيلا ,م),(شوكولاته ,م),(فستق ,م)}

عددها $2 \times 3 = 6$

تدريب 2/ يرمي شخص حجر النرد ويطلق مؤشر قرص فيه 4 أقسام متساوية مرقمة من 1 الى 4. استعمل قانون العد الاساسي وجد عدد النتائج الممكن.

$m = 6 \quad , \; n = 4$

$m \times n =$ عدد النتائج ← عدد النتائج $6 \times 4 = 24$

الدرس الرابع / الحدث

مثال / حدد الحدثين المستقلين والحدثين المترابطين في كل يأتي:

i) كيس فيه 6 كرات زرقاء ، 3 كرات بيضاء ، سحب كرتين الواحدة تلو الأخرى دون اعادة الاولى.

أفرض E_1 سحب الكرة الاولى (زرقاء او بيضاء) ، E_2 سحب كرة ثانية دون اعادة الكرة الاولى اي اختلف عدد الكرات في الصندوق في السحبة الثانية (E_1 يؤثر على E_2).

أذن E_2 , E_1 حدثان غير مستقلين (مترابطين)

ii) رمي حجر نرد وقطعة نقود، ظهور العدد 5 على حجر النرد والصورة على قطعة النقود.

أفرض E_1 ظهور العدد 5 على حجر النرد ، E_2 ظهر الصورة على قطعة النقود.

لا يؤثر E_1 في E_2 اذن E_2 , E_1 حدثان مستقلان.

تدريب / حدد الحدثين المستقلين والحدثين غير المستقلين (مترابطين) لكل مما يأتي:

i) سحب بطاقتين متتاليتين من مجموعة تحتوي على 26 بطاقة حمراء، 26 سوداء ان تكون الاولى حمراء والثانية سوداء اذ لم يرجع الاولى الى المجموعة.

E_1 سحب كرة حمراء ، E_2 سحب كرة سوداء دون اعادة الكرة الحمراء.

E_2 يتأثر بـ E_1 لذلك الحدثان غير مستقلين (مترابطان).

ii) اطلاق مؤشر قرص فيه 8 أقسام متساوية من 1 الى 8 ورمي حجر النرد.

E_1 حدث اطلاق المؤشر ، E_2 حدث رمي حجر النرد ولا يتأثر احدهما بالآخر فهما مستقلان.

iii) ان يصيب رقماً اكبر من 4 على القرص ويحصل على رقم اصغر من 4 على حجر النرد.

حدث E_1 يصيب رقم اكبر من 4 على القرص E_2 حدث يحصل على رقم اصغر من 4 على حجر النرد.

E_1 لا يؤثر في وقوع E_2 فهما حدثان مستقلان.

الدرس الخامس / الاحتمالات

مثال / جد الاحتمالات لكل حدث مما يأتي:

i) ظهور عدد فردي بعد رمي حجر النرد $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

ii) ظهور العدد 4 بعد رمي حجر النرد $P(E) = \frac{1}{6} \approx 0.17 = 17\%$

iii) كيس فيه 6 كرات حمر ، 5 كرات صفر ، احتمال ان تكون الكرة حمراء .

$$P(E) = \frac{6}{5+6} = \frac{6}{11} \approx 0.55 = 55\%$$

تدريب / جد الاحتمالات لكل حدث مما يأتي:

i) ظهور عدد اكبر من 5 بعد رمي حجر النرد. $P(E) = \frac{1}{6} \approx 0.17 = 17\%$

ii) ظهور الكتابة بعد رمي قطعة نقود $P(E) = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

iii) سحب بطاقة تحمل الحرف E من مجموعة البطاقات؟ A B C D E

$$P(E) = \frac{1}{5} = 0.2 = 20\%$$

iv) سحب كرة سوداء من صندوق فيه 10 كرات سود، 7 كرات بيض

$$P(E) = \frac{10}{10+7} = \frac{10}{17} = 59\%$$

الدرس السادس / الاحتمال التجريبي والاحتمال النظري

مثال1/ يمثل الجدول التالي بعد رمي حجر النرد 57 مرّة قدر احتمال ظهور العدد 3

النتيجة	1	2	3	4	5	6
عدد المرات	10	8	7	13	7	12

هو احتمال تجريبي

$$P(E) \approx \frac{\text{عدد مرات تحقيق الحدث}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{7}{57}$$

مثال2/ ما احتمال ظهور العدد 3 بعد رمي حجر النرد؟ الاحتمال النظري

عدد عناصر فضاء العينة هو ، $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$P(E) = \frac{\text{عدد النتائج التي تحقق الحدث}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}} = \frac{1}{6}$$

تدريب/ صندوق فيه:

3 كرات حمراء ، 1 كرة زرقاء ، 4 كرات بيض ما احتمال سحب كرة حمراء من الصندوق ؟

$$P(E) = \frac{3}{3+1+4} = \frac{3}{8}$$ احتمال سحب كرة حمراء



اختبار الفصل السابع Chapter 7 Test

1) الجدول المجاور يبين معدل درجات بعض الطلاب الصف الثاني المتوسط لشعبتين في موضوع الرياضيات

شعبة A	86	63	71	66	83	71	60	61	60	80	95
شعبة B	90	84	65	77	67	90	84	81	77	99	85

i) مثل البيانات بالساق والورقة:

ii) اي الشعبتين مداها اكبر؟

iii) قارن الوسيطين الشعبتين.

شعبة A الورقة	الساق	شعبة B الورقة
0 0 1 3 6	6	7 5
1 1	7	7 7
0 3 6	8	5 4 4 1
5	9	9 0 0

مدى شعبة A = 95 − 60 = 35

مدى شعبة B = 99 − 65 = 34

مدى شعبة A اكبر من مدى شعبة B

وسيط A = 71   وسيط B = 84

استعمل مجموعة البيانات التالية 73 ، 56 ، 56 ، 73 ، 68 ، 73 ، 59 ، 56 ، 73 ، 68 كي تنشأ بيان شاربين ثم اجب عما يلي.

i) ما مدى هذه البيانات

ii) جد الربيع الادنى والربيع الاعلى.

iii) كيف تفسر ان احد الشاربين اقصر من الآخر؟



الترتيب :

i) المدى = 73 − 56 = 17

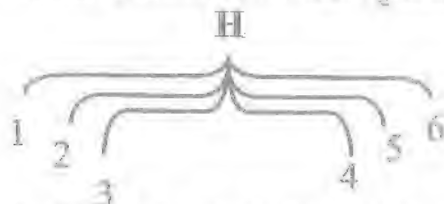
56 , 56 , 56 , 59 , 68 , 68 , 73 , 73 73 , 73

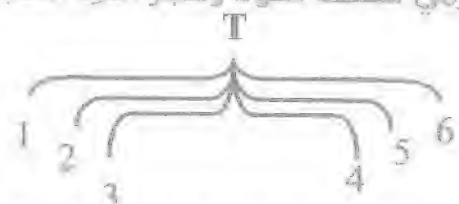
ii) الربيع الادنى = $\frac{56+56}{2} = 56$ الربيع الاعلى = $\frac{73+73}{2} = 73$

الوسيط = $\frac{68+68}{2} = 68$ القيمة الكبرى = 73   القيمة الصغرى = 56

iii) لأن الوسيط اقرب الى الاعلى

3) رمي قطعة نقود وحجر النرد اكتب جميع النتائج الممكنة بأستعمال مخطط الشجرة.





{(H,1), (H,2), (H,3), (H,4), (H,5), (H,6), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)}

4) استعمل قانون العد الاساسي لايجاد عدد الاحتمالات في السؤال (3)

$m = 2 \quad n = 6 \rightarrow m \times n = 2 \times 6 = 12$ عدد النتائج

5) كيف تميز بين حدثين من كونها مستقلين او مترابطين؟ وضح ذلك بمثال.

المستقلان لا يؤثر احدهما على وقوع الآخر. مثل رمي قطعة نقود وحجر النرد.

اما المترابطان يتأثر احدهما بوقوع الاخر. مثل سحب كرة حمراء من سلة تحوي كرتين حمراء

وكرتين بيضاء دون اعادتها ثم سحب مرة اخرى كرة فأن النتيجة الثانية تتأثر بالسحبة الاولى

6) رمي حجر النرد ، أوجد احتمال ان تكون الارقام الظاهرة تقبل القسمة على 3.

الارقام التي تقبل القسمة على 3 هي 3 ، 6 لذلك $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

لأن فضاء العينة $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

7) اذا كان E1 , E2 حدثان متتامان وكان $P(E_1) = \frac{2}{9}$ جد $P(E_2)$

$$P(E_2) + P(E_1) = 1 \rightarrow P(E_2) + \frac{2}{9} = 1 \rightarrow P(E_2) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

8) يمثل الجدول التالي بعد رمي قطعة نقود 15 مرة قدر احتمال بظهور الصورة.

$$P(E) \approx \frac{9}{15} = 0.6 = 60\%$$

9) رمي حجر النرد ، جد احتمال عدم ظهور الرقم 3 . اذا لم يظهر3 فسيظهر بقية الارقام

وهي $\{1, 2, 4, 5, 6\}$ وفضاء العينة $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ لذلك

$$P(E) = \frac{5}{6}$$

10) صندوق فيه 5 بطاقات صفر ، 8 بطاقات زرق ، ما احتمال سحب بطاقة زرقاء؟

$$P(E) = \frac{8}{8+5} = \frac{8}{13}$$

(انتهى الفصل السابع)



تمرينات الفصول

الفصل الخامس / الهندسة والقياس
Geometry and Measurement

الفصل السادس / الهندسة الاحداثية
Coordinate Geometry

الفصل السابع / الاحصاء والاحتمالات
Statistics and Probabilities

الفصل الخامس

الدرس الاول / علاقة الزوايا والمستقيمات (نظريات)

اختر الاجابة الصحيحة.

1) العلاقة بين الزاويتين 2 و 3 في الشكل المجاور (ص97 كتاب)

الجواب / متبادلتان (b)

2) العلاقة بين الزاويتين 2 و 4 في الشكل المجاور (ص97 كتاب)

الجواب / متناظرتان (d)

3) في الشكل المجاور اذا كان $m\measuredangle 1 = 60^0$ فأن $m\measuredangle 2$ يساوي (ص97 كتاب)

الجواب / 120° (d)

4) في الشكل المجاور اذا كان $m\measuredangle 1 = 35^\circ$ فأن $m\measuredangle 4$ يساوي (ص97 كتاب)

الجواب/ C (35°)

5) قياس الزاوية x في الشكل المجاور (ص97 كتاب)

الجواب / 118° (a)

الدرس الثاني / تطابق المثلثات

اختر الاجابة الصحيحة

1) المثلثات في الشكل المجاور متطابقان بسبب (ص98 كتاب)

الجواب / تطابق اضلاعهما الثلاثة (b)

2) المثلثان في الشكل المجاور

الجواب / غير متطابقين بسبب كون الزاوية غير محددة بين الضلعين (d) (ص98 كتاب)

3) المثلثان في الشكل المجاور.

الجواب/ غير متطابقان بسبب كون المثلثات لا تتطابق بتطابق زواياها الثلاثة (c) (ص98 كتاب)

4) المثلثان في الشكل المجاور متطابقان لذا فأن قيمة x التي تمثل طول الضلع:

الجواب / 9 cm (b) (ص 98 كتاب)



5) قيمة y , x التي تجعل ACD , ABC في الشكل المجاور   ص98 كتاب

$$4x = 16 \rightarrow x = \frac{16}{4} = 4 \ , \ 3y = 9 \rightarrow y = \frac{9}{3} = 3$$

الجواب / (d) (x = 4 , y = 3)

الدرس الثالث / خواص المثلثات (متساوي الساقين – متساوي الاضلاع – قائم الزاوية)

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) في المثلث المتساوي الساقين المجاور اذا علمت ان المحيط 13cm فأن قيمة x:

ص99 كتاب $(x + 3) + (x + 3) + (2x - 5) = 13 \Rightarrow 4x + 1 = 13 \Rightarrow 4x = 12$

$$\therefore x = \frac{12}{4} = 3$$

الجواب (d)

2) في المثلث المتساوي الاضلاع المجاور اذا كان المحيط 69 فأن قيمة x:

ص99 كتاب $(3x + 8) + (3x + 8) + (3x + 8) = 69$

$$9x + 24 = 69 \rightarrow 9x = 69 - 24 = 45 \rightarrow x = \frac{45}{9} = 5$$

∴ الجواب / 5 (b)

3) قياس كل زاوية في مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين: ص99 كتاب

الجواب / (C) 45°

4) في المثلث قائم الزاوية المجاور طول الضلع BC:

$$(13)^2 = (x)^2 + (5)^2$$ مبرهنة فيثاغورس

ص99 كتاب

$$169 = x^2 + 25 \rightarrow x^2 = 169 - 25 \rightarrow x^2 = 144$$

$$\therefore x = \sqrt{144} = 12\ cm$$

الجواب (a)

5) في الشكل المجاور المثلث القائم الزاوية في A مساحة المربع الكبير تساوي: شكل ص99 كتاب

$9 + 16 = 25\ cm^2$ (d)

6) مجموعة الاعداد التي لا تحقق مبرهنة فيثاغورس فيما لو كانت اضلاعاً لمثلث

a) $\{3 , 4 , 5\}$ $25 = 16 + 9$ تحقق

b) $\{6 , 8 , 10\}$ $100 = 36 + 64$ تحقق

c) $\{5 , 12 , 13\}$ $169 = 144 + 25$ تحقق

d) $\{3 , 5 , 33\}$ $(33)^2 = (5)^2 + (3)^2$ لا تحقق

لذلك الجواب (d)

الدرس الرابع / متوازي الاضلاع والمعين وشبه المنحرف.

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) يكون الشكل الرباعي متوازي الاضلاع اذا كان مجموع كل زاويتين متجاورتين (على ضلع واحد) في الشكل الرباعي يساوي: 180°

الجواب (C)

2) مساحة متوازي الاضلاع اذا علمت ان طول قاعدته 10 cm وطول ارتفاعه 16 cm يساوي $160\ cm^2$.

الجواب / (d)

3) محيط متوازي الاضلاع طول اثنين من اضلاعه المتجاورة 10 cm , 4 cm يساوي 28cm

الجواب / (C)

4) مساحة شبه المنحرف الذي طولا ضلعين متوازيين 6 cm , 10 cm وارتفاعه 5 cm: $40\ cm^2$

الجواب / (d)

5) محيط شبه منحرف متساوي الساقين طول كل منهما 10 cm وطول قاعدته العليا 5 cm وطول قاعدته السفلى 8 cm يساوي 33 cm

الجواب / (a)

6) معين مساحته $1500\ cm^2$ وارتفاعه 10 cm فأن طول ضلعه 150 cm

الجواب (b)

7) معين طول كل من قطريه المتعامدين 40 cm , 25 cm فأن مساحته: $500\ cm^2$

الجواب / (d) مساحة المعين= $\frac{25\times 40}{2} = \frac{1000}{2} = 500cm^2$

8) متوازي أضلاع طول قاعدته 16cm وارتفاعه نصف طول القاعدة فأن مساحته $128\ cm^2$

الجواب (b



الدرس الخامس / الاسطوانة والكرة (الخصائص ،المساحة السطحية ، الحجم)

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) اسطوانة دائرية قائمة مغلقة طول نصف قطر قاعدتها 14 cm وارتفاعها 10 cm فأن مساحتها الجانبية: المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

$$S.A = \frac{22}{7} \times 2 \times 14 \times 10 = 880\ cm^2$$

الجواب / (C)

2) اسطوانة دائرية قائمة مغلقة طول نصف قطر قاعدتها 7 cm وارتفاعها 3 cm فأن مساحتها الكلية

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

$$T.A = 2 \times 7 \times 3\pi + 2 \times 7^2\pi = 140\pi\ cm^2$$

جواب (d)

3) اسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها 8 cm وارتفاعها 2 سم فأن حجمها

$$V = \pi \times 8 \times 8 \times 2 = 128\pi\ cm^3$$ جواب (d)

4) اسطوانة دائرية قائمة طول نصف قاعدتها 6 cm وحجمها $360\pi\ cm^3$ فأن ارتفاعها

$$V = \pi r^2 h \rightarrow 360\pi = \pi \times 6 \times 6 \times h \rightarrow h = \frac{360\pi}{\pi \times 6 \times 6} = \frac{360}{36} = 10cm$$

الجواب (c)

5) كرة نصف قطرها 3 cm فأن حجمها

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3 \times 3 \times 3 = 36\pi cm^3$$

الجواب (a)

6) المساحة السطحية للكرة التي نصف قطرها 14 cm.

$$A = 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = 2464\ cm^2$$

الجواب / (d)

7) طول نصف قطر كرة حجمها $972\pi\ cm^3$:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow 972\pi = \frac{4}{3} \times \pi r^3 \rightarrow r^3 = \frac{\pi \times 3 \times 972}{4 \times \pi} = 729$$
$$r = \sqrt[3]{729} = 9\ cm$$

الجواب / (d)

8) طول نصف قطر كرة مساحتها السطحية $400\pi\ cm^2$

$$A = 4\,\pi r^2 \rightarrow 400 = 4 \times \frac{22}{7} r^2$$

$$r^2 = \frac{\pi \times 400}{\pi \times 4} \rightarrow r^2 = 100 \approx 32 \ \rightarrow r = \sqrt{32} = 5.7$$

$$100 \Rightarrow r = \sqrt{100} = 10cm$$

الجواب / (c)

الدرس السادس / مساحة الاشكال المركبة المنتظمة وغير المنتظمة

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) مساحة الشكل المركب والمنتظم المجاور تساوي 47.13 تقريبا شكل ص102 كتاب

الجواب / (a)

2) مساحة الشكل المركب المنتظم تساوي $252\ cm^2$ شكل ص102 كتاب

الجواب / (b)

3) مساحة الشكل المركب المنتظم المجاور تساوي $175\ cm^2$ شكل ص102 كتاب

الجواب / (a)

4) المساحة التقريبية لسطح المفتاح في الشكل المجاور $31\ cm^2$ تقريباً شكل ص102 كتاب

الجواب / (C)

5) في الصورة المجاورة خريطة بغداد محاطة بدائرة نصف قطرها 3cm شكل ص102 كتاب

وبمقياس رسم 1:100000 تكون مساحة مدينة بغداد بصورة تقريبية باستخراج مساحة الدائرة . جد نصف قطر الدائرة.

الجواب / (d).

الفصل السادس

الدرس الاول / تمثيل جدول دالة محددة في المستوي الاحداثي

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) النقطة (3 , 1-) تمثل بيانياً في المستوي الاحداثي الربع الثاني

الجواب / (b)

2) المستقيم AB ، A (-1 , 1) ، B (3 , -3) تمثل بيانيا في المستوى الاحداثي في الربعين الثاني

والرابع. الجواب / (C)



3) الازواج المرتبة (4 , 2) , (2 , 2) , (0 , 2) تمثل بيانياً في المستوي الاحداثي:

بمستقيم. الجواب (d)

4) الازواج المرتبة (4 , 2) , (4 , 1) , (2 , 1) , (1 , 1) تمثل بيانيا في المستوي الاحداثي لـ:

مستطيل الجواب / (b)

5) الدالة التي مدخلاتها متغيرة ومخرجاتها ثابتة تمثل مستقيم موازي لـ

محور السينات الجواب / (a)

6) العلاقة التي مدخلاتها ثابتة ومخرجاتها متغيرة تمثل بيانياً في المستوى الاحداثي: **نقطة الاصل.**

7) ما يقطعه مجد من مسافة بالكيلومترات في 3 ساعات عند صعوده القطار علماً انه يقطع في الساعة الواحدة 10 كم: 30 كم الجواب / (d)

8) اذا كان جدول الدالة : فأن قيمة x هي **شكل ص103 كتاب**

الجواب/ (c) 2−

9) اذا كان جدول الدالة : فأن قيمة x هي **شكل ص103 كتاب**

الجواب/(b)

10) اذا كان جدول الدالة: فأن قيمة x هي (1)

الجواب / (a)

الدرس الثاني / مقدمة في الدوال

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) كل علاقة دالة بشرط كل مدخلة لها مخرجة الجواب / (b)

2) اي العبارات التالية صحيحة:

(a) ✓ (b) ✗ (C) ✗ (d) ✗

3) شروط الدالة هي العناصر والصور وقاعدة الدالة.

الجواب / (C).

4) اي العلاقات التالية هي دالة{5 , 4 , 3} → {1, 0 , 1-} العلاقة (b)

5) اي العلاقات التالية هي دالة {2 , 1 , 0} → {3 , 2 , 1} العلاقة (a)

6) اذا كانت قاعدة الدالة 1 − 7x ومجموعة العناصر {2 , 0 , 2-} فأن مجموعة العناصر هي:

الجواب / {13 , 1- , 15-} (a)

7) اذا كانت قاعدة الدالة $x - 6$ وكانت مجموعة الصور {-5 , -4 , -3} فإن مجموعة العناصر هي:

الجواب / {1 , 2 , 3} (d)

8) اذا كانت مجموعة العناصر للدالة {0 , 2 , 4} ومجموعة الصور {-1 , 1 , 3} فأن قاعدة الدالة هي :

الجواب $x - 1$ (C)

9) مثل الدالة التالية $y = 9$ بيانياً في المستوي الاحداثي مستقيم الجواب (b) .

10) اذا كانت مجموعة العناصر للدالة {-3 , -6, -9} وقاعدة الدالة $y = x + 3$ فأن مجموعة الصور هي :

الجواب {0 , -6 , -3} (d)

11) عندما تزداد قيمة x في الدالة $y = -x^2$ فأن قيمة y سوف:

تتناقص (d) الجواب

الدرس الثالث / الدوال الخطية.

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) معادلة المستقيم: هي معادلة تعبر عن الدالة الخطية

الجواب $y = 4x - 1$ (a)

2) الدالة الخطية $y = 2x$ تمثيلها يكون في

الجواب(b) الربع الاول والثالث

3) كل دالة خطية يمكن التعبير عنها في المستوي الاحداثي:

الجواب(b) مستقيم

4) كل دالة خطية يمكن تمثيلها بالمستوي الاحداثي ب :

الجواب (C) نقطتين

5) اي من الدالة الخطية تمر بنقطة الاصل:

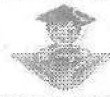
الجواب (d) $y = 2x$

6) الدالة الخطية التي تمر بالربعين الثاني والرابع هي:

الجواب (d) $y = -3x$

7) عدد طبيعي ضرب في 2 ثم طرح منهُ 4 بعد الضرب فكان الناتج بعد الضرب 50 ما هي المعادلة الخطية العامة بالنسبة للعدد الطبيعي؟

الجواب $2x - 4 = 50$ (a)



8) تمثل الدالة الخطية بياناً y = 4 في المستوي الاحداثي مستقيماً موازياً لـ

الجواب: محور السينات (a)

9) النقطة التي تستخدمها للتحقق من تمثيل الدالة الخطية في جدول الدالة

الجواب: النقطة الثانية (a)

10) الدالة الخطية x = - 7 تمثل بياناً في المستوي الاحداثي

الجواب: محور الصادات (b)

11) الدالة الخطية x = 3 تمثل بياناً بمستقيم في

الجواب: الربعين الاول والرابع (d)

الدرس الرابع / الانعكاس والدوران في المستوي الاحداثي:

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) الجواب (a) 2) الجواب (d) 3) محور الصادات (b) الجواب

4) اذا كان انعكاس النقطة (3 , 2-) هو (3- , 2-) فأن خط الانعكاس هو محور السينات (a)

5) $B'(2,-4)$ (a) الجواب

6) $A'(-2,-4)$ (a) الجواب

7) $B'(-3,-3)$ (b) الجواب

8) المستقيم $\overline{AB}$ (2 , 0) A ، (4 , 1) B ، اذا اجرى انعكاساً المستقيم على محور الصادات $B'(-1,4)$ فأن $A'(0,2)$ (a) الجواب.

9) $C(1,-3)$ الجواب 10) (2 , 4) D الجواب 11) (3- , 1-) (b) (1- , 3-) الجواب

الدرس الخامس / الانسحاب في المستوي الاحداثي:

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) الجواب (5 , 5) (b) 2) الجواب(4 , 5-) (c) 3) الجواب (7 , 3) (a)

4) الجواب (1 ,2-) (b) 5) (2-,5) (c) 6) الجواب(1 , 5-) (b)

7) الجواب(0 , 6) (a) 8) الجواب $B'(4,3)$ (C) 9) الجواب$C'(2,5)$ (b)

10) الجواب(7- , 2) (d) 11) الجواب(x , 4 – m) (d)

الفصل السابع /

الدرس الاول / قياس النزعة المركزية والمدى :

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) شكل ص108 كتاب : **الجواب (d) الاعداد هي 12 , 10 , 8 , 7 , 7 , 6 , 5 , 4**

2) استعمل البيانات في السؤال الاول. **الجواب (C) قيمة الوسيط هي 7.**

3) **الجواب (b) الوسط الحسابي = 57**

4) **الجواب (b) المنوال = 90**

5) **الجواب (d) المدى = 26**

6) **الجواب (a)**

الدرس الثاني / تمثيل البيانات ببيان الشاربين :

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) **الجواب (C) الوسيط يقع داخل المستطيل**

2) **الجواب (d) المدى الربيعي = الربيع الاعلى – الربيع الادنى**

3) **الجواب (d) المدى الربيعي = طول المستطيل**

4) **الجواب (C) تقسم البيانات بيان الشاربين الى : اربعة اقسام**

5) **الجواب (d) A = 10 , B = 20**

6) **الجواب (C) 47,75**

الدرس الثالث / التجربة العشوائية

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) **الجواب (C)**

2) **الجواب (d)**

3) **الجواب (d)**

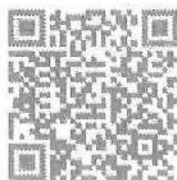
4) **الجواب (C)**

5) **الجواب (b).**

6) **الجواب (C).**

7) **الجواب (b).**

عزيزي الطالب
التقط هذا الباركود
وريح قلبك





الدرس الرابع / الحدث.

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) الجواب (C)

2) الجواب (d)

3) الجواب (d)

4) الجواب (b)

5) الجواب (b).

الدرس الخامس / الاحتمالات

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) (d) $P(E) = \frac{m}{n}$ 2) الجواب (C) $\frac{6}{15}$ 3) (d) $\frac{5}{8}$

4) الجواب(C) $P(E_1) + P(E_2) = 1$ 5) الجواب(d)100%   6) الجواب (C) $\frac{1}{6}$

الدرس السادس / الاحتمال التجريبي والاحتمال النظري.

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1) الجواب (c) $\frac{1}{2}$ 2) الجواب $\frac{7}{10}$ (b) لأن $\frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$.

3) الجواب هو 0.25 (C) لأن $\frac{50}{200} = 0.25$.

4) الجواب $\frac{2}{3}$ (d) لأن $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

5) الجواب $\frac{1}{3}$ (C)

6) الجواب % 80 (d)

تمت بعون الله تعالى

مع تمنياتنا لكم بالنجاح الباهر والمستقبل الزاهر

مع تحيات أستاذ المادة : رعد المعمار

و مكتب الطابعي